

## DISTRIBUCION ESTADISTICA DE LA "PENDIENTE" (STEEPNESS) DE LA OLA.

Por

Hugo Gustavo PEÑA

Roberto MONTES SIORDIA

Centro de Investigaciones Científica y de Educación Superior

Ensenada, B. C. México.

Diciembre, 1982.

### RESUMEN

Con base en la distribución estadística conjunta de altura y período, se deduce la función de densidad de probabilidad de la pendiente ( $H/L$ ) de la ola. Esta distribución resulta ser proporcional a la de Rayleigh (el factor de proporcionalidad si bien no es constante, es siempre muy cercano a la unidad). La comparación con datos obtenidos de registros de olas es excelente.

Se obtiene también la distribución teórica conjunta de período y pendiente de la ola, la cual no pudo ser comparada debido a que las observaciones no son suficientes.

### ABSTRACT.

The theoretical probability density function of wave steepness is obtained starting from the joint distribution of heights and periods. This distribution turns out to be proportional to Rayleigh law (the proportional factor is always very close to unity). The comparison with actual data from wave records is excellent.

The theoretical joint distribution of periods and steepness of waves is also obtained. At present it can not be compared to actual data because they are not enough for statistical significance.

### INTRODUCCION

La pendiente (steepness) de la ola está definida como el cociente entre su altura y su longitud de onda ( $H/L$ ) y es uno de los parámetros más importantes que determina la relación de las olas con los procesos costeros.

El transporte de sedimentos en la dirección perpendicular a la línea de costa, y por consecuencia las formas del perfil de playa están asociados con la pendiente de la ola. Las olas de tormenta locales, que tienen pendientes grandes (alturas grandes y períodos cortos). Corresponden a estados de mar del tipo destructivo y tienden a formar barras en la zona de rompiente (perfil de invierno). Los

perfiles de verano son suaves y corresponden a oleaje de valores bajos de pendiente. Galvin (1968) identifica 4 tipos de rompiente según el valor de la pendiente de la ola y el gradiente de la playa. También la relación entre la altura de la rompiente y la altura de la ola en aguas profundas depende de la pendiente de la ola (Komar and Gaughan, 1973). El gradiente de la playa, para un dado tamaño del sedimento, es inversamente proporcional a la pendiente de la ola (King, 1972).

Estos, por mencionar solo algunos, son procesos que dependen críticamente de la relación H/L, por lo cual el conocimiento de sus características estadísticas es de gran importancia.

Motivado por lo expresado, la intención de este trabajo es presentar la derivación de las distribuciones que rigen el comportamiento estadístico de la pendiente de la ola y su comparación con resultados obtenidos a partir de registros de olas.

### DERIVACION DE LA ESTADISTICA DE (H/L).

Suponiendo que las olas del mar son el resultado de la superposición de muchas componentes sinusoidales dentro de un espectro energético angosto en frecuencias y de fase aleatoria, Ezraty et. al. (1977) llegaron a un modelo para la distribución estadística conjunta de alturas y períodos. Se basaron en una relación establecida por Cartwright y Longuet-Higgins (1956) para la densidad de probabilidad conjunta de una señal de ruido Gaussiano, que tiene un valor en un máximo y una segunda derivada con respecto al tiempo en dicha cresta. La relación, entonces, se define como:

$$p(\eta_1, \eta_3) = \frac{1}{(2\pi \Delta \eta_4)^{1/2}} |\eta_3| \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\eta_4 \eta_1^2 + 2 \eta_2 \eta_1 \eta_3 + \eta_0 \eta_3^2}{\Delta} \right\}$$

Donde se definen algunos parámetros como: momentos espectrales respecto al origen

$$\eta_x = \int_0^{\infty} f^x S(f) df$$

siendo S(f) la densidad espectral de las olas. El parámetro  $\mathcal{E}$  mide el grado de "anchura" del espectro S(f) y está definido por,

$$\mathcal{E} = \left[ 1 - (\eta_2^2 / \eta_0 \eta_4) \right]^{1/2} \quad \text{ó} \quad \mathcal{E}^2 = \frac{\Delta}{\eta_0 \eta_4}$$

siendo,

Para cada máximo positivo, se ha asignado una onda sinusoidal que tiene amplitud  $\eta$ , y período T dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{\eta_1}{\eta_3}}$$

Una expresión es entonces obtenida para la distribución estadística conjunta de alturas y períodos, dada por:

$$p(h, \tau) = \frac{\alpha^3 h^2}{4\sqrt{2\pi} \varepsilon (1-\varepsilon^2) \tau^5} \exp \left\{ -\frac{h^2}{8\varepsilon^2 \tau^4} \left[ (\tau^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2 \alpha^4 \right] \right\} \dots\dots\dots (1)$$

donde  $h = 2\eta_1 / m_0^{1/2}$ ;  $\tau = T / T_c$ ;  $\eta_1$  es el valor del máximo del perfil de la superficie libre del mar (referido a su valor medio),  $T_c$  es el período medio entre dos máximos positivos sucesivos (llamado período medio de "crestas") y definido por

$$T_c = \frac{2\pi}{\alpha} (m_2 / m_4)^{1/2}$$

y además,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \right] \quad \text{y} \quad \alpha^2 = \varepsilon^2 / (1 - \varepsilon^2)$$

Por integración numérica de (1), puede mostrarse que el valor medio del período  $\tau(\varepsilon)$  toma valores muy próximos a la unidad en el rango  $0 < \varepsilon \leq 0.95$ . Para facilitar la comparación con datos experimentales es conveniente entonces definir la variable  $T = \tau / \bar{\tau}(\varepsilon)$  De acuerdo a ello la distribución (1) queda

$$p(h, T) = \frac{\alpha^3 h^2}{4\sqrt{2\pi} \varepsilon (1-\varepsilon^2) \bar{\tau}^4 T^5} \exp \left\{ -\frac{h^2}{8\varepsilon^2 \bar{\tau}^4 T^4} \left[ (\bar{\tau}^2 T^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2 \alpha^4 \right] \right\} \dots\dots\dots (2)$$

Dado que la longitud de onda de las olas en aguas profundas es proporcional a  $T^2$ , se define la pendiente de la ola (en aguas profundas) como  $Z = h/T^2$

Por medio de la variable auxiliar ( $W = T$ ), la distribución conjunta de Z y W es

$$p(Z, W) = \frac{1}{|J|} p(h, T) \dots\dots\dots (3)$$

siendo  $|J|$  valor absoluto del Jacobiano  $J$  de la transformación  $Z = h/T$  ( $W = T$ )  
 Su valor es

$$J = \begin{vmatrix} \partial z / \partial h & \partial z / \partial T \\ \partial \omega / \partial h & \partial \omega / \partial T \end{vmatrix}$$

de donde  $J = 1/T^2 = 1/W^2$ . Luego, por (3), la distribución en  $(Z, W)$  es

$$p(z, \omega) = \frac{\alpha^3 z^2 \omega}{4\sqrt{2\pi} \varepsilon (1-\varepsilon^2) \tilde{\tau}^4} \exp \left\{ -\frac{z^2}{8\varepsilon^2} \left[ (\omega^2 - a_1^2) + a_2^2 \right] \right\} \dots (4)$$

$$\text{con } a_1^2 = \alpha^2 / \tilde{\tau}^2 \quad \text{y} \quad a_2^2 = a^2 \alpha^4 / \tilde{\tau}^4$$

Si se define la pendiente de la ola con referencia a la altura significativa  $H_{1/3}$ , entonces  $Z = h/T^2 = (H/\sqrt{1.7})/T^2 = 4(H/H_{1/3})/T^2 = 4S$ . La variable  $S$  representará ahora a la pendiente de la ola, por lo que la distribución (4) queda,

$$p(S, \omega) = \frac{16 \alpha^3 S^2 \omega}{\sqrt{2\pi} \varepsilon (1-\varepsilon^2) \tilde{\tau}^4} \exp \left\{ -\frac{2S^2}{\varepsilon^2} \left[ (\omega^2 - a_1^2) + a_2^2 \right] \right\} \dots (5)$$

La distribución (5) puede verse en las figuras 1. a, b y c para distintos valores de  $(\varepsilon)$ . La distribución de la pendiente de la ola,  $S$ , se encuentra integrando (5) respectivo del período  $W$ ,

$$p(S) = \int_0^{\infty} p(S, \omega) d\omega ,$$

de donde

$$p(S) = \frac{4\alpha^4 S}{(1-\varepsilon^2) \tilde{\tau}^4} \exp \left\{ -\frac{2\alpha^4 S^2}{(1-\varepsilon^2) \tilde{\tau}^4} \right\} \times \left\{ \alpha^{-1} P(x) \right\} \dots (6)$$

siendo

$$p(x) = \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt , \text{ con } x = 2a_1^2 S/\varepsilon$$

La distribución de la pendiente de la ola (6) es el producto de una distribución de Rayleigh y un factor  $\alpha^{-1} P(x)$  que es cercano a la unidad (es exactamente igual a 1 para  $(\varepsilon = 0)$ , es decir

$$p(S) = \text{Rayleigh} \times \left[ \alpha^{-1} P(x) \right] \dots (7)$$

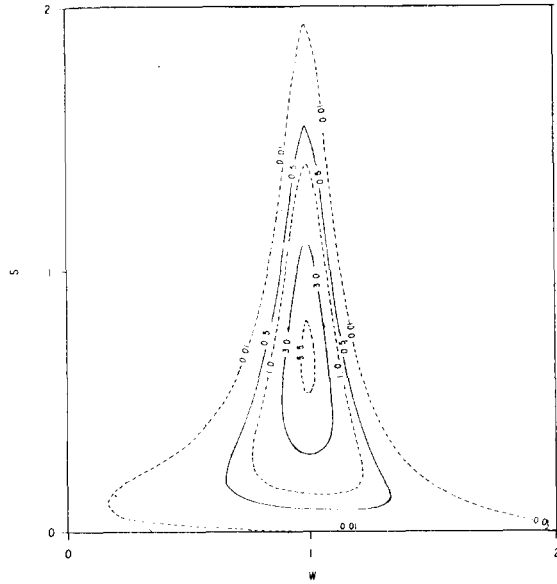


Fig. 1a. Distribución conjunta de pendiente y período de la ola, para  $\epsilon = 0.2$ .

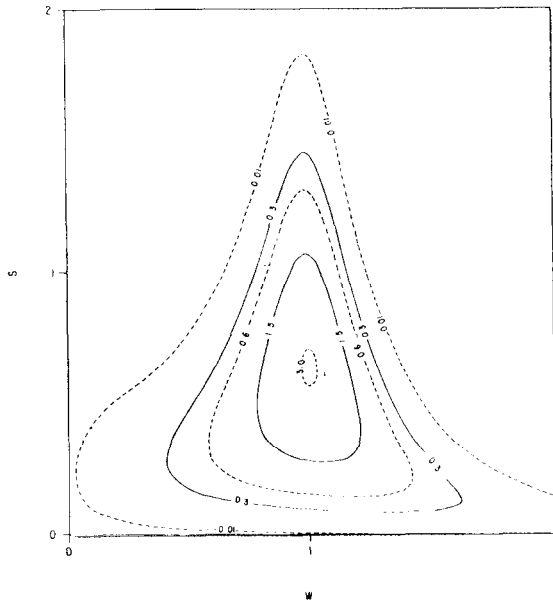


Fig. 1b. Distribución conjunta de pendiente y período de la ola, para  $\epsilon = 0.4$ .

DISTRIBUCION ESTADISTICA DE LA OLA

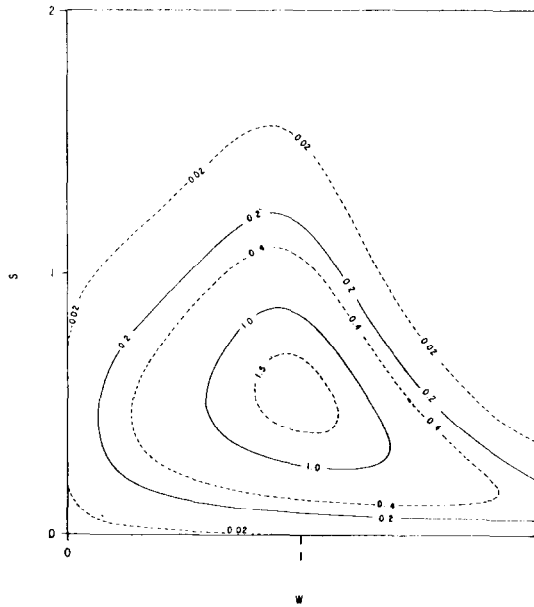


Fig. 1c. Distribución conjunta de pendiente y período de la ola, para  $E = 0.8$ .

En general, el factor  $\alpha^{-1} P(x)$  modifica la distribución de Rayleigh de forma tal que hace disminuir la densidad de probabilidad para valores de  $S$  menores que un valor crítico  $S_0$ . Para  $S > S_0$ , la densidad de probabilidades  $p(S)$  es mayor que la que correspondería a la distribución de Rayleigh. El valor  $S_0$  se encuentra a partir de la condición.

$$\alpha^{-1} p(x_0) = 1, \text{ con } x_0 = 2\alpha^2 S_0/\epsilon$$

La tabla 1 muestra los valores del factor  $\alpha^{-1} P(x)$  para ( $\epsilon = 0.8$ ) que es el caso más extremo. Cuanto menor sea  $\epsilon$ , menor será el porcentaje en el que se modifica la distribución de Rayleigh.

El valor medio  $\bar{S}$  de la distribución (6) se encuentra resolviendo la integral.

$$\bar{S} = \int_0^{\infty} s p(s) ds,$$

de donde resulta  $\bar{S} = S(\text{Rayleigh}) \times F(\epsilon)$

con 
$$\bar{S}(\text{Rayleigh}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\epsilon^2)^{1/2} \bar{\lambda}^2}{2\alpha^2}$$

$$y \quad F(\epsilon) = \frac{1}{\pi\alpha} \left[ \pi - \text{arc tg}(a) + a/(1+a^2) \right]$$

TABLA 1

$E = 0.8$

S	$\propto^{-1} P(x)$
0.00	0.50
0.23	0.81
0.35	0.90
0.47	0.987
0.58	1.05
0.82	1.15
0.99	1.19
1.17	1.22
1.34	1.23

( $\propto$ , a como definidos anteriormente). En el rango de ( $\varepsilon$ ) entre 0 y 0.95 el valor de  $F(\varepsilon)$  es muy cercano a la unidad ( $F(0.2) = 1.0084$ ;  $F(0.8) = 1.072$ ) por lo que el valor medio ( $\bar{S}$ ) puede aceptarse como aquel expresado por la distribución de Rayleigh únicamente.

La figura 2.a muestra la distribución de la pendiente de la ola S representada solamente por la distribución de Rayleigh.

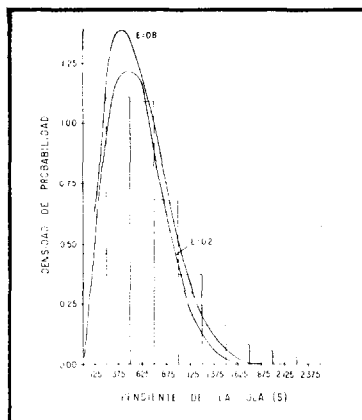


Fig. 2a. Distribución de la pendiente de la ola (expresión (6) del texto) para  $\varepsilon = 0.2$  y  $\varepsilon = 0.8$  Histograma de valores observados con  $r(11.T) = 0.0 \pm 0.10$ .

**DISTRIBUCION CONDICIONAL DE LA PENDIENTE DE LA OLA, DADO EL PERIODO.**

Otra importante distribución es la que rige el comportamiento estadístico de la pendiente de la ola condicionado a un dado valor del período. Su derivación parte de la expresión (5) y teniendo en cuenta que

$$p(s/w) = p(s,w) / p(w) \dots\dots\dots (9)$$

siendo  $p(w) = \int_0^{\infty} p(s,w) dw, \dots\dots\dots (10)$

de (9) y (10), resulta  $p(s/w) = 4\pi^{-1/2} \lambda^{3/2} S^2 \exp(-\lambda S^2) \dots\dots\dots (11)$   
 $\lambda = 2\epsilon^{-2} [(w^2 - a_1^2)^2 + a_2^2]$

(a<sub>1</sub> y a<sub>2</sub> como definidos anteriormente).

El valor medio de la distribución condicional (11) es

$$\bar{S}(w) = \int_0^{\infty} s p(s/w) ds,$$

de donde  $\bar{S}(w) = 2(\pi \lambda)^{-1/2} \dots\dots\dots (12)$

La expresión (12) puede verse en la figura 3 para diferentes anchos espectrales.

**COMPARACION CON LAS OBSERVACIONES Y DISCUSION.**

A fin de efectuar una comparación de los resultados teóricos con aquellos observados, se analizaron registros de olas obtenidos con un sensor de presión instalado a una profundidad de 35 metros, al oeste de la Isla Guadalupe, en el Océano Pacífico, a unos 300 km de la costa del Estado de Baja California, México.

La serie de datos representan 2.6 días continuos de registro, muestreados con un intervalo de 2 seg. Dicho registro fue dividido en subseries de 20 minutos de duración. Cada subserie fue analizada estadísticamente para obtener valores de altura de la ola, período de "cruce de cero", a partir de los cuales se estiman la altura significativa (H<sub>1/3</sub>), el período medio de "cruce de cero" (T<sub>z</sub>) y los valores individuales de H/H<sub>1/3</sub> y T/T<sub>z</sub> para estimar el valor individual de la pendiente de la ola. Debido a que el parámetro que determina el ancho espectral



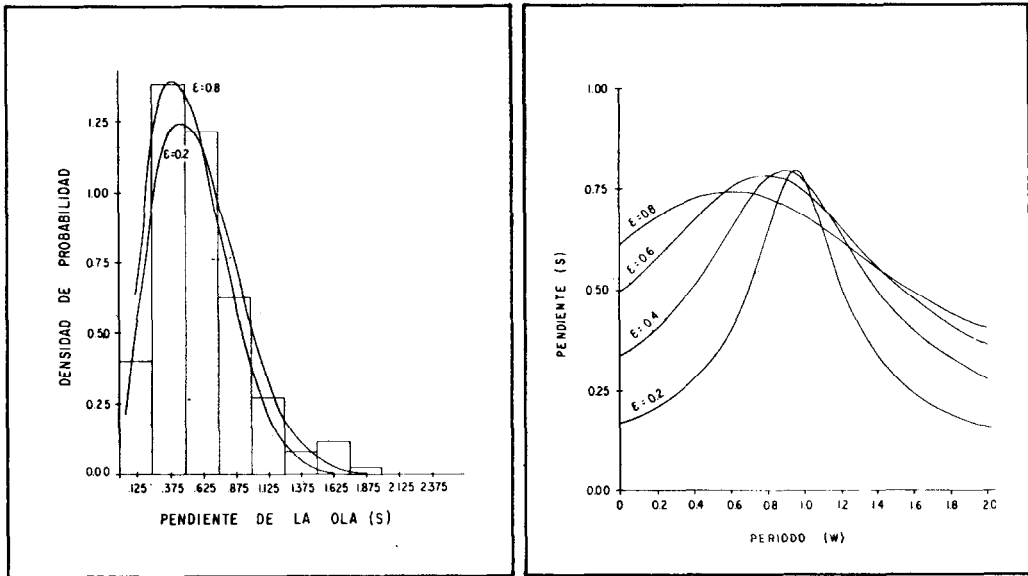


Fig. 2b. Distribución de la pendiente de la ola (ex-Fig. 3. Valor medio de la pendiente de la ola condicionada a período fijo, para distintos valores del ancho espectral.

Fig. 3. Valor medio de la pendiente de la ola condicionada a período fijo, para distintos valores del ancho espectral.

( $\mathcal{E}$ ) es muy sensible a la frecuencia de corte del espectro (Goda, 1970) no se consideró conveniente realizar esta estimación. En lugar de ello las subseries se agruparon según el valor del coeficiente de correlación lineal entre alturas y períodos  $r$  (H,T) (Goda, 1978), ya que puede probarse teóricamente que  $r$  (H,T) y  $\mathcal{E}$  son directamente proporcionales.

Dado que el registro total corresponde a un intervalo de tiempo (2.6 días) durante el cual no existieron grandes variaciones en la dinámica de las olas registradas, solamente resultaron dos grupos de valores del coeficiente de correlación:  $r$  (H,T) =  $0.0 \pm 0.10$  y  $r$  (H,T) =  $0.29 \pm 0.02$ .

Este escaso rango de variación impide realizar una comparación total con todas las distribuciones teóricas, por lo que solo se efectúa la comparación con la distribución marginal de la pendiente de la ola (expresión (6)).

Las figuras 2a y 2b muestran los histogramas obtenidos de los datos observados, conjuntamente con distribuciones teóricas. Para  $r = 0.0 \pm 0.10$ , (Fig. 2a), la curva con ( $\mathcal{E} = 0.2$ ) es la que mejor se ajusta al histograma y para  $r = 0.29 \pm 0.02$ , (Fig. 2b),  $\mathcal{E} = 0.8$  es la mejor.

Es de hacer notar que las distribuciones teóricas de las figuras 2a y 2b representan la distribución de Rayleigh solamente (expresión (6) sin el factor  $\alpha^{-1} P(x)$ ).

DISTRIBUCION ESTADISTICA DE LA OLA

Si incluyéramos dicho factor, que es menor que la unidad para S pequeños (Ver tabla 1), la comparación con el histograma sería excelente.

La tabla 2 ilustra la comparación entre la teoría y la observación de los valores medios y dispersión estandar de la distribución de la pendiente de la ola y puede notarse que los valores observados son sistemáticamente mayores en un porcentaje promedio del 50%, el cual es muy pequeño para efectuar resultados con fines prácticos.

TABLA 2

Valores teóricos			Valores observados		
	$\bar{S}$	$\sigma$		$\bar{S}$	$\sigma$
$\epsilon = 0.2$	0.62	0.32	$r = 0.0 \pm 0.10$	0.67	0.41
$\epsilon = 0.8$	0.55	0.29	$r = 0.29 \pm 0.02$	0.61	0.34

Nótese también que la distribución teórica de la pendiente de la ola no es muy sensible al cambio del parámetro del ancho espectral. Tampoco parece ser muy sensible el parámetro r (H,T) al menos dentro del rango entre 0.0 y 0.3.

Este comportamiento poco variable ofrece entonces la ventaja de poder aceptar a la distribución de Rayleigh con parámetro  $\epsilon = 0.5$  como la Ley estadística que gobierna la distribución de la pendiente de la ola para los fines prácticos de su aplicación.

No puede decirse lo mismo de la distribución conjunta de pendiente y período, ni del valor medio condicional de la pendiente, para los cuales la variación en  $\epsilon$  es acusada sensiblemente, mostrando marcadas asimetrías.

Un aspecto no estudiado en este trabajo es el debido a las discrepancias que pueden existir por haber asumido en la teoría que las olas se propagan en aguas profundas, cuando las observaciones fueron obtenidas en aguas poco profundas ( $h \approx 35$  metros). No parece, sin embargo, justificarse el rehacer los cálculos teóricos con  $L \sim T$  (aguas poco profundas) debido al excelente ajuste hallado.

**RESUMEN Y CONCLUSIONES**

La distribución estadística de la pendiente de la ola puede ser representada por una distribución de Rayleigh con el parámetro ( $\bar{S}$ ) que, aunque depende explícitamente del ancho de la banda del espectro de ola ( $\epsilon$ ), puede considerarse aproxi-

madamente constante debido a su poca sensibilidad ante cambios de aquel, para su aplicación a problemas de índole práctica. Por lo tanto, la distribución de la pendiente queda especificada dados los valores de la altura significativa  $H_{1/3}$  y del período medio de "cruce de cero"  $T_z$  del registro observado.

El acuerdo encontrado entre la teoría y la observación es excelente.

## REFERENCIAS

- CARTWRIGHT D.E. y M.S. Longuet-Higgins. (1956). "The statistical distribution of the maxima of a random function". Proc. Roy. Soc. Ser. A 237, pp.212-232.
- EZRATY, R. et al. (1977). "Comparison with observation at sea of period or height dependent sea state parameters from a theoretical model". Paper presented at the 9th. Annual offshore Technology Conference in Houston, Tex., May 2-5, 1977.
- GALVIN, C.J. (1968). "Breaker tide classification on three laboratory beaches". J. Geophys. Res., Vol. 73, No. 12, 3651-3659.
- GODA, Y. (1970). "Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation". Report of the Port and Harbour Research Institute. Vol. 9, No.3, September 1970.
- (1978). "The observed joint distribution of periods and heights of sea waves", Proceedings 16th. Coastal Eng. Conference, Vol. 1, pp. 227.
- KING, C.A.M. (1972). Beach and Coast, Edward Arnold (published) (Ltd). London, Second Edition.
- KOMAR, P. y M. Gaughan (1973). "Airy wave theory and breaker height prediction". Proceedings 13th. Coastal Eng. Conference, pp 405-418.