

ESPECTRO DIRECCIONAL DEL OLEAJE ESTIMADO CON INFORMACION DE LAS FLUCTUACIONES DE PRESION Y COMPONENTES HORIZONTALES DE VELOCIDAD

WIND WAVE DIRECTIONAL SPECTRUM ESTIMATED FROM INFORMATION ON FLUCTUATIONS OF PRESSURE AND HORIZONTAL VELOCITY COMPONENTS

O. Delgado-González ¹
J. Ochoa ²

¹ Instituto de Investigaciones Oceanológicas
Universidad Autónoma de Baja California
Apartado Postal 453
Ensenada, Baja California, México

² Centro de Investigación Científica y de
Educación Superior de Ensenada (CICESE)
Apartado Postal 2732
Ensenada, Baja California, México

Delgado-González, O. y Ochoa, J. (1990). Espectro direccional del oleaje estimado con información de las fluctuaciones de presión y componentes horizontales de velocidad. Wind wave directional spectrum estimated from information on fluctuations of pressure and horizontal velocity components. *Ciencias Marinas*, 16(2): 1-30.

RESUMEN

A partir de las fluctuaciones de presión y la velocidad horizontal en un punto, se pueden calcular cuatro "datos" o restricciones que la distribución angular de oleaje debe cumplir (Longuet-Higgins *et al.*, 1963; Nagata, 1964). El ajuste que Long (1980) propone se puede hacer con funciones sencillas de dos parámetros, de los cuales uno indica la dirección de propagación predominante, y el otro la rapidez de decaimiento simétrico en su alrededor o directividad.

Los "datos" no son cantidades con certeza absoluta, sino estimaciones a partir de las cuales es posible cuantificar el comportamiento promedio de sus errores. Esto permite la formulación de una hipótesis estadística que califica el ajuste como aceptable o rechazable (Long, 1980), ya que la bondad de ajuste se puede comparar con lo esperado. Se utilizan datos sintéticos para inferir el límite del ajuste aceptable.

Utilizando este procedimiento con datos obtenidos en las costas de San Felipe, B.C., se concluye que el espectro direccional no puede tener la sencillez de los modelos unimodales empleados.

ABSTRACT

With the information of pressure and horizontal velocity fluctuations at a single point, it is possible to calculate four "data" or restrictions on the wind wave directional spread function (Longuet-Higgins *et al.*, 1963; Nagata, 1964). The fit proposed by Long (1980) can be achieved with simple functions of two parameters; one of the parameters shows the mean wave direction and the other the directivity which is a measure of the directional spread.

The "data" are not quantities with absolute certainty but estimations that allow examination of the variability of its errors. This permits the formulation of a statistical hypothesis that qualifies the fit as acceptable or rejectable (Long, 1980) on the grounds of a comparison with the expected errors. Synthetic data are used to infer the limit in which the fit is acceptable.

Using this procedure with data obtained in coastal regions off San Felipe, B.C., Mexico, it is concluded that the directional spectrum does not have the simplicity of the unimodal functions commonly used.

1. INTRODUCCION

El aumento de asentamientos humanos en la zona costera y el descubrimiento de mantos petroleros bajo el lecho marino, han creado la necesidad de conocer en detalle las características del oleaje, generalizándose para tal fin el uso de parámetros estadísticos que tratan de describirlo, incluyendo entre éstos su dirección de propagación, tanto en aguas profundas como someras.

El interés de estimar la dirección de propagación así como el de calificar la confiabilidad de tal estimación surge, al tratar de comprender y predecir procesos costeros relacionados con el transporte de sedimento, pues la altura de la ola y su ángulo de incidencia determinan en gran medida la intensidad y dirección de las corrientes que se generan. Además, su conocimiento es necesario para analizar los posibles movimientos y esfuerzos a los que está sujeto cualquier estructura flotante o fija.

Por otro lado, el conocimiento de la dirección de propagación del oleaje, es de utilidad básica para efectuar estudios sobre su generación (Phillips, 1958), propagación y disipación, pues juega un papel importante en los procesos de transferencia de energía, tanto de la atmósfera al océano como entre las diferentes componentes de frecuencia existentes en el espectro del oleaje (Young *et al.*, 1987). También existe interés en su determinación para calibrar y evaluar modelos de predicción de oleaje (Barstow y Guddal, 1987) y en los estudios del oleaje a través de sensores remotos (Donelan *et al.*, 1985).

Son varios los estudios que se han efectuado para obtener estimaciones de la dirección de propagación del oleaje (Cote *et al.*, 1960; Longuet-Higgins *et al.*, 1963; Munk *et al.*, 1963; Nagata, 1964; Suzuki, 1969). Panicker (1974) presenta una revisión de los

1. INTRODUCTION

The increase of populated areas along the coastal zone and the discovery of oil reservoirs under the sea bed have created the need of learning the detailed characteristics of wind waves. For this purpose, the use of statistical parameters which attempt to describe them, including their propagation direction, in both deep and shallow waters, have to be generalized.

The interest in estimating wave direction as well as assessing the reliability of such an estimation arises from our desire to understand and predict coastal processes related to sediment transport, since the height of the wave and its incidence angle greatly determine the intensity and direction of the currents which are generated. Furthermore, its knowledge is necessary to analyse the possible movements and stress which any floating or fixed structure is subjected to.

On the other hand, knowledge of the directional distribution of wind waves is necessary to carry out studies on their generation (Phillips, 1958), propagation and dissipation, since it plays an important role in energy transfer processes, from the atmosphere to the ocean as well as between the different frequency components in the wind wave spectrum (Young *et al.*, 1987). Its determination is also of interest to calibrate and evaluate models of wind wave prediction (Barstow and Guddal, 1987) and to study wind waves by means of remote sensors (Donelan *et al.*, 1985).

Several studies have been carried out to obtain estimations of the directional distribution of wind waves (Cote *et al.*, 1960; Longuet-Higgins *et al.*, 1963; Munk *et al.*, 1963; Nagata, 1964; Suzuki, 1969). Panicker (1974) reviewed the procedures used to esti-

procedimientos empleados para estimar el espectro direccional. Borgman (1979) obtiene una formulación estándar de las diferentes formas para calcular dichas estimaciones. Long y Hasselmann (1979), Long (1980) y Lygre y Krogstad (1986), utilizan la matriz de covarianza de las desviaciones esperadas en los "datos", para determinar la calidad de las técnicas que presentan.

La dirección de propagación del oleaje se puede calificar utilizando el concepto de espectro direccional. Este se caracteriza con una función $D_f(\theta)$ que especifica la distribución angular de la varianza parcial en cada banda de frecuencia en consideración. Como la energía de las ondas por unidad de área superficial es proporcional a la varianza de la elevación, entonces $2\rho g S(f) D_f(\theta)$ es la densidad de energía por frecuencia y dirección, donde $S(f)$ es la densidad espectral de las elevaciones, ρ es la densidad del agua y g es la magnitud de la aceleración debida a la gravedad.

A partir de la teoría lineal, Longuet-Higgins *et al.* (1963) presentan cómo los autospectros y espectros cruzados de la información disponible se combinan para formar cuatro expresiones normalizadas (coherencias) que representan los "datos" o restricciones que debe cumplir el espectro direccional. Esta información consiste en tres variables medidas por una boya superficial; aceleración vertical, cantidad que puede ser integrada dos veces para obtener el desplazamiento η , y las pendientes de la superficie, una en la dirección de S-N, η_y , y la otra en la dirección de O-E, η_x . Dada la complicada y poco conocida respuesta de la boya, las tres mediciones (η , η_x , η_y) son poco confiables. Sin embargo, las mismas restricciones se pueden construir con información equivalente, como lo es la que se utiliza en este trabajo; la presión y las componentes horizontales de la velocidad (Nagata, 1964). En la primera sección de teoría se presentan explícitamente estas restricciones o "datos".

El objetivo principal en este trabajo es el de presentar las modificaciones necesarias para mejorar el método propuesto por Long (1980) que califica la confiabilidad del espectro direccional estimado. La técnica se basa en prescribir una relación analítica (modelo) que incluye parámetros que se deben ajustar a

mate the directional spectrum. Borgman (1979) obtained a standard formulation of the different ways of obtaining these estimations. Long and Hasselmann (1979), Long (1980) and Lygre and Krogstad (1986) used the covariance matrix of the expected deviations in the "data" to determine the quality of the techniques which they present.

The wave direction can be assessed using the concept of directional spectrum. It is characterized by a function $D_f(\theta)$ which specifies the angular distribution of the partial variance in each frequency band under consideration. As the energy of the waves per unit surface area is proportional to the variance of the height, then $2\rho g S(f) D_f(\theta)$ is the energy density per frequency and direction, where $S(f)$ is the spectral density of the heights, ρ is the density of the water and g is the acceleration due to gravity.

By linear theory, Longuet-Higgins *et al.* (1963) show how the auto-spectra and cross-spectra of the available information combine to form four normalized expressions (coherences) which represent the "data" or restrictions which the directional spectrum should satisfy. This information consists of three variables measured by a floating buoy: vertical acceleration, quantity which can be integrated twice to obtain the displacement η , and surface slopes, one in the S-N direction, η_y , and the other in the W-E direction, η_x . In view of the complicated and poorly known response of the buoy, the three measurements (η , η_x , η_y) are unreliable. However, the same restrictions can be constructed, as is done in this work, with equivalent information: pressure and horizontal velocity components (Nagata, 1964). These restrictions or "data" are explicitly presented in section 2.

The main objective of this work is to present the modifications necessary to improve the method proposed by Long (1980) which assesses the reliability of the estimated directional spectrum. The technique is based on assuming an analytical relation (model) which includes parameters that

"mejor satisfacer" las cuatro restricciones. Dado que las estimaciones de los autospectros y espectros cruzados están sujetas a variabilidad estadística, ésta debe considerarse al ajustar las restricciones y en la forma en que se lleva a cabo el ajuste. El comportamiento de la variabilidad estadística puede ser determinado siguiendo la metodología propuesta por Jenkins y Watts (1968) y Long (1980). Nuestra contribución en este objetivo es el presentar el criterio estadístico dado por Long (1980) en una forma rigurosa. Tal criterio es para determinar la confiabilidad o consistencia estadística del espectro direccional estimado.

Este criterio consiste en formular una prueba de rechazo o no rechazo, con cierto grado de confiabilidad establecido por el usuario, a la hipótesis de considerar el espectro estimado como el verdadero. Si la prueba falla para un determinado nivel de significancia, la hipótesis se rechaza; en caso contrario, el modelo no es rechazado como una estimación estadísticamente válida del espectro direccional real. Esto es posible dado que se considera conocido el comportamiento probabilístico de la variabilidad en las estimaciones espectrales y por lo tanto se puede calificar, cuando el ajuste es común y cuando es poco común (en este último caso se rechaza la hipótesis). Este tema se presenta en los rubros 2.3 y 2.4 de la sección de teoría y análisis de datos.

Los modelos ajustados se representan mediante funciones unimodales sencillas de dos parámetros libres. El máximo de cada función determina la dirección de propagación preferencial (indicada por uno de los parámetros). Las funciones empleadas decaen en forma simétrica con una rapidez determinada por el segundo parámetro, el cual caracteriza el grado de directividad (una medida de qué tan amplia o angosta es la función $D_f(\theta)$ alrededor de la dirección preferencial). Estos modelos se pueden relacionar con sencillez al problema físico relacionado con la dirección y son presentados en la parte 2.2 de la siguiente sección.

Como segundo objetivo se presenta la utilización de tales ajustes a datos obtenidos en San Felipe, B.C.

En la sección de datos de campo se describen: las características del área de estudio, del instrumento, de los datos de campo y

should be fitted to "better satisfy" the four restrictions. Since the estimations of the auto-spectra and cross-spectra are subject to statistical fluctuations, these should be considered when and how the fit is carried out. The behaviour of the statistical variability can be determined following the method proposed by Jenkins and Watts (1968) and Long (1980). Our contribution is to present Long's (1980) criterion to determine the reliability or statistical consistency of the estimated directional spectrum, in a rigorous manner.

This criterion consists in formulating a test of rejection or acceptability, with a certain degree of reliability established by the user, to the hypothesis of considering the estimated spectrum as the real one. If the test fails for a certain level of significance, the hypothesis is rejected, otherwise the model is accepted as a valid statistical estimate of the real directional spectrum. This is possible since the probabilistic behaviour of the variability in the estimates is assumed to be known and, hence, can be assessed whether the fit is common or uncommon (in the latter case the hypothesis is rejected). This is presented in sections 2.3 and 2.4.

The fitted models are represented by way of simple unimodal functions of two free parameters. The maximum of each function gives the preferential directional distribution (indicated by one of the parameters). The functions used decrease symmetrically with a rate given by the second parameter, which characterizes the degree of directivity (a measure of how wide or narrow $D_f(\theta)$ is around the preferential direction). These models can be simply associated to the physical problem related to the direction and are presented in section 2.2.

As a second objective, fits to data obtained in San Felipe, Baja California, Mexico, are presented.

In section 3, we describe the characteristics of the study area, the instrumentation, the field data and how the cross-spectra

de la obtención de sus espectros cruzados. Este capítulo finaliza con la subsección de resultados y discusión donde se relacionan los aspectos teóricos presentados y las mediciones de campo.

Por último una breve sección de conclusiones finaliza con el artículo.

2. TEORIA Y ANALISIS DE AJUSTE

2.1. Momentos relacionados a mediciones

La distribución direccional de energía para cada frecuencia $D_f(\theta)$, reúne todas las propiedades que cualquier densidad de probabilidad deba cumplir; es no negativa y su integral en todo el dominio de la dirección es la unidad, además de ser adimensional (Borgman, 1969):

$$D_f(\theta) \geq 0 \quad \forall \theta \in (-\pi, \pi); \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_f(\theta) d\theta = 1. \quad (1)$$

Las restricciones que las observaciones ofrecen están relacionadas con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\int \cos \theta D(\theta) d\theta = \frac{S_{pu}}{\sqrt{S_{pp}(S_{uu} + S_{vv})}} \equiv d_1,$$

$$\int \sin \theta D(\theta) d\theta = \frac{S_{pv}}{\sqrt{S_{pp}(S_{uu} + S_{vv})}} \equiv d_2,$$

$$\int \cos 2\theta D(\theta) d\theta = \frac{S_{uu} - S_{vv}}{S_{uu} + S_{vv}} \equiv d_3, \quad (2)$$

$$\int \sin 2\theta D(\theta) d\theta = \frac{2S_{uv}}{S_{uu} + S_{vv}} \equiv d_4,$$

were obtained. This is followed by the results and discussion, where the theoretical aspects presented and the field measurements are related.

Finally, the conclusions are presented in section 4.

2. THEORY AND ANALYSIS OF FIT

2.1. Moments related to measurements

The directional distribution of energy for each frequency $D_f(\theta)$, has all the properties which any probability density should have; it is not negative and its integral over the direction domain is unity, as well as being adimensional (Borgman, 1969):

The restrictions offered by the observations are related to this system of equations:

donde S_{ij} es el espectro cruzado entre las variables i, j (autoespectro si $i=j$). El subíndice f que representa la dependencia de la frecuencia ha sido suprimido al igual que los límites de integración, ya que todas las integrales presentadas cubren el dominio $[-\pi, \pi]$. Este sistema es una modificación del propuesto inicialmente por Longuet-Higgins *et al.* (1963), ambos representan relaciones deducidas de teoría lineal del oleaje. Las ecuaciones en el sistema (2) representan un problema directo en el que dada la función D , se calculan d_1, d_2, d_3 y d_4 .

A continuación se presentan algunas características de los modelos direccionales de dos parámetros que se pueden utilizar para resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (1) y (2).

2.2. Distribuciones direccionales de dos parámetros

La forma de expresar este tipo de distribuciones es $D(\theta) = D(\theta; a, \mu)$, donde los parámetros que la definen son μ , ángulo donde $D(\theta)$ es máxima, y a una medida de su directividad.

La dispersión σ^2 se define como una medida de la concentración de la energía alrededor de la dirección preferencial μ , mediante (Longuet-Higgins *et al.*, 1963):

$$\sigma^2 = \int 4 \operatorname{sen}^2 \frac{(\theta - \mu)}{2} D(\theta) d\theta, \quad (3)$$

que para funciones muy angostas es aproximadamente:

$$\sigma^2 \approx \int (\theta - \mu)^2 D(\theta) d\theta. \quad (4)$$

La directividad a es una función inversa de la dispersión σ^2 . La utilidad de emplear la dispersión aparece al comparar las características entre modelos de dos parámetros, pues para una misma dispersión (σ^2) y ángulo (μ), los modelos $D(\theta)$ mostrarán ciertas diferencias geométricas. Note que para funciones simétricas el parámetro μ cumple

where S_{ij} is the cross-spectrum between variables i, j (auto-spectrum if $i=j$). The subindex f which represents the dependence on the frequency and the integration limits has been omitted, since all the integrals presented cover the domain $[-\pi, \pi]$. This system is a modification of the one initially proposed by Longuet-Higgins *et al.* (1963). Both represent relations deduced from the wind wave linear theory. The equations in system (2) represent a direct problem in that given a function D , d_1, d_2, d_3 and d_4 are calculated.

Some characteristics of the two-parameter directional models which can be used to solve the system of equations formed by equations (1) and (2) are presented below.

2.2. Two-parameter directional distributions

This type of distribution is expressed by $D(\theta) = D(\theta; a, \mu)$, where the parameters are μ , angle at which $D(\theta)$ is maximum, and a , a measure of its directivity.

The dispersion σ^2 is defined as a measure of the concentration of the energy around the preferential direction μ , through (Longuet-Higgins *et al.*, 1963):

which for very narrow functions is approximately:

The directivity a is an inverse function of the dispersion σ^2 . The dispersion is useful to compare the characteristics between two-parameter models, since for the same dispersion (σ^2) and angle (μ), the models $D(\theta)$ will show certain geometric differences. Note that for symmetrical functions the parameter μ satisfies

$$\int \operatorname{sen} \frac{(\theta - \mu)}{2} D(\theta) d\theta = 0,$$

por lo que μ y σ sólo proporcionan información de los momentos de menor orden. Además, para los modelos a tratar y dado el parámetro de dispersión, todos los momentos "pares" (integrales con $\operatorname{sen}^{2n}(\theta - \mu)$) en el sistema de ecuaciones (2) quedan determinados y todos los "impares" (integrales con $\operatorname{sen}^{2n+1}(\theta - \mu)$) son nulos por simetría, en forma análoga al caso de la densidad de probabilidad Gaussiana con media cero.

Estos modelos no son capaces de representar el caso de oleaje con máximos relativos de la función $D(\theta)$ en diferentes direcciones.

2.2.1. Modelo de Von Mises (VM)

La densidad de probabilidad de la distribución circular normal o distribución de Von Mises, se expresa como (Batschelet, 1981)

$$D(\theta) = \frac{e^{\alpha \cos(\theta - \mu)}}{2\pi I_0(\alpha)}, \quad (5)$$

donde I_0 es la función Bessel modificada de segunda clase y orden cero, cuyo producto con 2π normaliza la integral en forma tal que su integral es la unidad (cumple con ec. 1).

La expresión analítica para la dispersión en este modelo es

$$\sigma_{VM}^2 = 2 \left(1 - \frac{I_1(\alpha)}{I_0(\alpha)} \right), \quad (6)$$

donde I_2 es la función Bessel modificada de segunda clase de orden dos.

2.2.2. Modelo coseno cuadrado generalizado (CG)

El modelo coseno cuadrado generalizado es utilizado en numerosos trabajos (Longuet-Higgins *et al.*, 1963; Mitsuyasu y Rikkishi,

therefore, μ and σ only provide information on the moments of lower order. Furthermore, for the models to be used and given the dispersion parameter, all the "even" moments (integrals with $\operatorname{sen}^{2n}(\theta - \mu)$) in the system of equations (2) are determined and all the "odd" moments (integrals with $\operatorname{sen}^{2n+1}(\theta - \mu)$) are null by symmetry, in analogous form to the case of Gaussian probability density with zero mean.

These models are incapable of representing directional spectra with relative maxima of the function $D(\theta)$ in different directions.

2.2.1. Von Mises model (VM)

The probability density of the normal circular distribution or Von Mises distribution is expressed by (Batschelet, 1981)

where I_0 is the modified second class and zero order Bessel function, whose product by 2π normalizes the integral in such a way that its integral is unity (satisfies eq. 1).

The analytical expression for the dispersion in this model is

where I_2 is the modified second class and order two Bessel function.

2.2.2. Generalized squared cosine model (CG)

The generalized squared cosine model is used in numerous works (Longuet-Higgins *et al.*, 1963; Mitsuyasu and Rikkishi, 1975; Goda

1975; Goda *et al.*, 1978) por lo que puede ser utilizado como un estándar de referencia y tiene por expresión:

$$D(\theta) = C_0 \cos^{2s} \left(\frac{\theta - \mu}{2} \right), \quad (7)$$

donde $s \geq 0$ es el parámetro que indica la directividad, en un sentido geométrico similar a a del modelo anterior. El coeficiente de normalización de este modelo es:

$$C_0 = \frac{\Gamma(s+1)}{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} \quad (8)$$

donde Γ es la función gamma y la dispersión es

$$\sigma_{CC}^2 = \frac{2}{s+1}. \quad (9)$$

2.2.3. Modelo de Lygre (LY)

El tercer modelo ha sido empleado por Lygre y Krogtad (1986) y tiene como expresión:

$$D(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos(\theta - \mu)} ; \beta \in (0, 1), \quad (10)$$

β representa la directividad, y su dispersión se expresa mediante:

$$\sigma_{LY}^2 = 2(1 - \beta). \quad (11)$$

La solución analítica del sistema de ecuaciones (2) al sustituir estos modelos adquiere las siguientes características:

$$d_1 = \left[\frac{I_1(a)}{I_0(a)}, \frac{s}{s+1}, \beta \right] \cos \mu,$$

et al., 1978) and can thus be used as a standard. It is expressed by:

where $s \geq 0$ is the parameter which indicates directivity, in a geometric sense similar to a in the previous model. The normalization coefficient of this model is:

where Γ is the gamma function and the dispersion is

2.2.3. Lygre model (LY)

The third model has been used by Lygre and Krogtad (1986) and is expressed by:

β represents the directivity, and its dispersion is expressed by:

The analytical solution of the system of equations (2) after substituting these models, acquires the following characteristics:

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \left[\frac{I_1(a)}{I_0(a)}, \frac{s}{s+1}, \beta \right] \text{sen } \mu, \\
 d_3 &= \left[\frac{I_2(a)}{I_0(a)}, \frac{s(s-1)}{(s+1)(s+2)}, \beta^2 \right] \text{cos } 2\mu, \\
 d_4 &= \left[\frac{I_2(a)}{I_0(a)}, \frac{s(s-1)}{(s+1)(s+2)}, \beta^2 \right] \text{sen } 2\mu,
 \end{aligned} \tag{12}$$

donde los tres elementos en los corchetes corresponden a la solución analítica de sustituir VM, CG, y LY al sistema (2) en forma respectiva.

La Figura 1 presenta una comparación de estos tres modelos para tres valores de dispersión σ^2 . De esta figura se puede apreciar la similitud que presentan los modelos VM y CG.

Dada una μ y una σ los tres modelos producen los mismos valores numéricos de d_1 , d_2 y d_3/d_4 . La única diferencia de un modelo a otro es un factor en los valores de d_3 y d_4 . Note que para $\mu = 0$, $d_1 = 1 - \sigma^2/2$. En general, para cualquier modelo simétrico y cualquier μ

where the three elements in the squared brackets correspond to the analytical solution of substituting VM, CG and LY into system (2) respectively.

A comparison of these three models for three dispersion values σ^2 is presented in Figure 1. From this figure, the similarity between the VM and CG models can be appreciated.

Given a μ and a σ , the three models produce the same numerical values of d_1 , d_2 and d_3/d_4 . The only difference from one model to another is a factor in the values of d_3 and d_4 . Note that for $\mu = 0$, $d_1 = 1 - \sigma^2/2$. In general, for any symmetric model and any μ ,

$$\sigma^2 = 2 \left(1 - (d_1^2 + d_2^2)^{1/2} \right),$$

relación consistente con la definición de σ (ec. 3) y el sistema (2).

2.3. Variabilidad estadística

El motivo de introducir diferentes modelos de dos parámetros libres es el de poder ajustar o escoger de entre ellos al que "mejor" describa las restricciones formuladas a partir del sistema (2) y los datos.

Como se puede observar, el sistema (2) no tiene "solución" única, pues para un conjunto arbitrario de valores d_1 , d_2 , d_3 y d_4 , con tal que

a relation consistent with the definition of σ (eq. 3) and system (2).

2.3. Statistical variability

The reason for introducing different models of two free parameters is to be able to fit or choose which of them "better" describes the restrictions formulated by system (2) and the data.

As can be seen, system (2) does not have a unique "solution", since for an arbitrary set of d_1 , d_2 , d_3 and d_4 values, provided that

$$d_1^2 + d_2^2 < 1 \quad , \quad d_3^2 + d_4^2 < 1 \quad ,$$

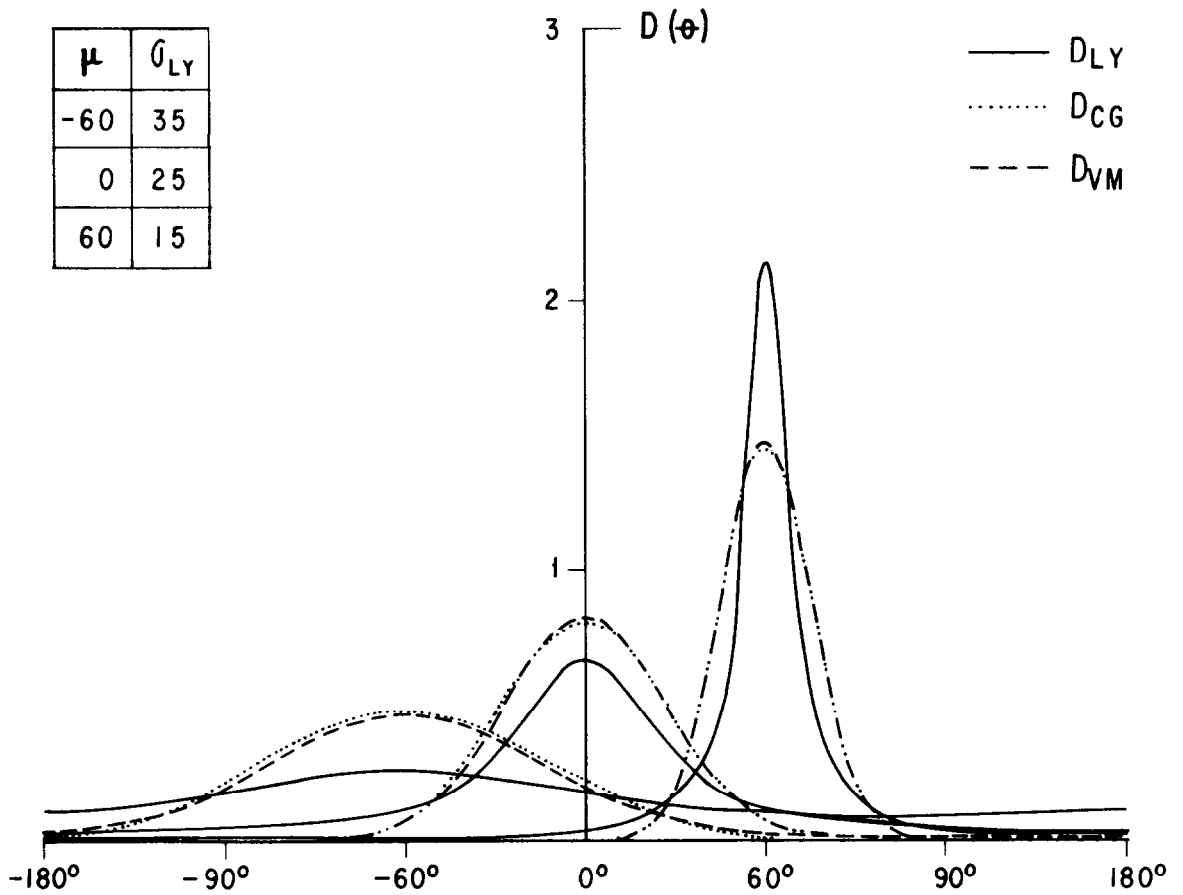


Figura 1. Función de distribución direccional $D(\theta)$ evaluada mediante los tres modelos diferentes (VM, CG y LY) de dos parámetros para diferentes valores de dirección preferencial (μ) y dispersión (σ^2).

Figure 1. Directional distribution function $D(\theta)$ evaluated by the three different two-parameter models (VM, CG and LY), for different values of preferential direction (μ) and dispersion (σ^2).

hay un sinnúmero de funciones D que satisfacen tal sistema y las restricciones indicadas por 1 (Ochoa y Delgado-González, 1990).

Por otro lado, la información disponible sólo nos permite obtener estimaciones de d_1 , d_2 , d_3 y d_4 . Con el propósito de elegir el modelo o distribución direccional que sea mejor en el sentido estadístico, es necesario efectuar pruebas que analicen su consistencia estadística.

A continuación se analiza la variabilidad estadística que presentan las cuatro cantidades que forman las restricciones del sistema de ecuaciones (2). En particular, es posible estimar el vector $\underline{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ a partir de las observaciones disponibles $\hat{\underline{o}} = (\hat{o}_1, \hat{o}_2, \hat{o}_3, \hat{o}_4)$ y suponer que tal estimación presenta una cierta variabilidad estadística, que en general puede ser representada por:

$$\hat{\underline{o}} = \underline{d} + \underline{\epsilon}, \quad (13)$$

donde ϵ es una diferencia al azar cuyo comportamiento estadístico puede ser determinado (Jenkins y Watts, 1968; Long, 1980). En este trabajo sólo se toma en consideración este tipo de variabilidad, ya que presumiblemente, los errores instrumentales son de orden menor.

El vector $\hat{\underline{o}}$ contiene los valores numéricos en base a los cuales se encuentra una estimación de la función $D=D(\theta)$. Tanto \underline{d} como ϵ son desconocidos, sólo el comportamiento estadístico de ϵ se da por establecido. El problema es grave dado que aun conociendo exactamente \underline{d} hay una infinidad de funciones D que satisfacen el sistema (2). Sin embargo, el suponer que un viento uniforme y constante genera oleaje unimodal y simétrico (un prejuicio no por todos compartido; Phillips (1958) propone simetría bimodal para $f > g/2 * U$, donde U es la velocidad del viento), nos permite proponer como hipótesis de trabajo ajustar a los "datos" funciones como las previamente descritas.

En el contexto de un ajuste, es claro que con cuatro o más parámetros libres, no es raro obtener un ajuste exacto en un sistema como el representado por (2), independientemente

there are countless functions D that satisfy such a system and the restrictions indicated by 1 (Ochoa and Delgado-González, 1990).

On the other hand, the information available only allows us to obtain estimates of d_1 , d_2 , d_3 and d_4 . In order to select the best (in the statistical sense) model or directional distribution it is necessary to carry out tests which analyse its statistical consistency.

Next, the statistical variability presented by the four quantities that form the restrictions of equation system (2) is analysed. In particular, it is possible to estimate the vector $\underline{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ from the available observations $\hat{\underline{o}} = (\hat{o}_1, \hat{o}_2, \hat{o}_3, \hat{o}_4)$ and assume that this estimate presents a certain statistical variability, which in general can be represented by:

where ϵ is a random difference whose statistical behaviour can be determined (Jenkins and Watts, 1968; Long, 1980). Only this type of variability is considered in this study, since, presumably, the instrumental errors are lower.

The vector $\hat{\underline{o}}$ contains the numerical values from which an estimate of the function $D=D(\theta)$ is found. Both \underline{d} and ϵ are unknown. Only the statistical behaviour of ϵ is assumed to be known. The problem is far from simple, since even if \underline{d} is known there are countless functions D which satisfy system (2). However, assuming that a steady and uniform wind generates unimodal and symmetrical wind waves (a hypothesis not shared by all; Phillips (1958) proposes bimodal symmetry for $f > g/2 * U$, where U is the wind velocity), we can propose as a working hypothesis, fitting the "data" with functions such as those described previously.

While performing a fit with four or more free parameters, it is not unusual to obtain an exact fit for a system such as that represented by (2), independently of the

de la variabilidad estadística de $\hat{\sigma}$. Un ajuste exacto a datos con errores al azar, puede producir una versión completamente distorsionada del espectro real (Long, 1980). No sólo eso, sino que no se puede llevar a cabo ninguna prueba de consistencia estadística, puesto que, independientemente del espectro real, se pueden exhibir una infinidad de espectros que ajusten exactamente al vector $\hat{\sigma}$ (Ochoa y Delgado-González, 1990).

El comportamiento de ϵ puede ser deducido del comportamiento estadístico de las estimaciones de los espectros cruzados. De (13) y de la primera ecuación de (2), se tiene que un estimador de d_1 es:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 &= \frac{E_{pu}}{\sqrt{E_{pp}(E_{uu} + E_{vv})}} = \\ &= \frac{S_{pu} + \epsilon_{pu}}{\sqrt{(S_{pp} + \epsilon_{pp})(S_{uu} + \epsilon_{uu} + S_{vv} + \epsilon_{vv})}} = d_1 + \epsilon_1 \end{aligned} \quad (14)$$

donde S_{ij} representa el espectro cruzado verdadero, ϵ_{ij} su variabilidad estadística con sus índices respectivos y E_{ij} el espectro cruzado estimado (a partir de las series de tiempo, en realidad se utiliza sólo el coespectro cuando $(i \neq j)$, la teoría lineal establece que el espectro de cuadratura entre las variables p , u y v es cero). Si esta expresión se desarrolla aplicando una expansión binomial se obtiene que:

$$\epsilon_1 = d_1 \left[\frac{\epsilon_{pu}}{S_{pu}} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{uu} + \epsilon_{vv}}{S_{uu} + S_{pp}} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{pp}}{S_{pp}} + O\left(\frac{\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}}{S_{ij}S_{kl}}\right) \right]. \quad (15)$$

Considerando el valor esperado de ϵ_1 , se tiene que las cantidades espectrales cruzadas normalizadas son estimadores sesgados pues algunos de los productos $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}$ serán cuadrados exactos y por lo tanto su valor esperado es definido positivo. Este es el caso común en estimadores de coherencia que son construidos con normalizaciones de los datos mismos. Las cantidades del tipo $E[\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}]$ se pueden evaluar por la fórmula dada por Jenkins y Watts (1968):

statistical variability of $\hat{\sigma}$. An exact fit to data with random errors, can produce a completely distorted version of the real spectrum (Long, 1980). Furthermore, it is impossible to carry out any statistical consistency test, since, independently of the real spectrum, there can be countless spectra which fit the vector $\hat{\sigma}$ exactly (Ochoa and Delgado-González, 1990).

The behaviour of ϵ can be deduced from the statistical behaviour of the estimates of the cross-spectra. From (13) and the first equation in (2), d_1 can be estimated by:

where S_{ij} represents the real cross-spectrum, ϵ_{ij} its statistical variability with its respective indices and E_{ij} the estimated cross-spectrum (from the time series, in reality only the co-spectrum is used when $(i \neq j)$, the linear theory establishes that the quadrature spectrum between variables p , u and v is zero). Performing a binomial expansion to this expression, one obtains:

Considering the expected value of ϵ_1 , the normalized cross spectral quantities are biased estimators since some of the products $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}$ will be exact squares and, therefore, their expected value is defined positive. This is the usual case with coherence estimators which are obtained by normalizing the data. The quantities of type $E[\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}]$ can be evaluated by the formula given by Jenkins and Watts (1968):

$$E[(E_{ij} - S_{ij})(E_{kl} - S_{kl})] = \\ = Cov < E_{ij} E_{kl} > = \frac{[S_{ik} S_{jl} + S_{il} S_{jk}]}{\nu}, \quad (16)$$

donde ν es el número de grados de libertad de las estimaciones espectrales y el sesgo o tendencia depende inversamente del número de grados de libertad. Si este número de grados de libertad es suficientemente grande (>25), se puede argumentar que el comportamiento de la variabilidad estadística es Gaussiano y el sesgo despreciable. En el presente trabajo los estimadores espectrales con las que se forman las cuatro restricciones, provienen de espectros con 32 grados de libertad.

Si se desprecia el sesgo ocasionado por los productos cruzados, se tendrá

$$E[\hat{\delta}_1 - d_1] = E[\hat{\delta}_2 - d_2] = E[\hat{\delta}_3 - d_3] = E[\hat{\delta}_4 - d_4] \cong 0 \quad (17)$$

y, por ejemplo,

$$E[(\hat{\delta}_1 - d_1)(\hat{\delta}_1 - d_1)] = E[\epsilon_1^2] = \\ = d_1^2 E\left[\left(\frac{\epsilon_{pu}}{S_{pu}} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{uu} + \epsilon_{vv}}{S_{uu} + S_{pp}} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{pp}}{S_{pp}} + O\left(\frac{\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}}{S_{ij}S_{kl}}\right)\right)^2\right].$$

Esta expresión se reduce (al despreciar los términos mayores a cuadráticos) a:

$$E[\epsilon_1^2] = \frac{1}{2} [d_1^2 z_1 - 2d_1 d_2 d_4 - d_3(2d_1^2 - 1) + 1] \nu^{-1},$$

donde (Long, 1980):

$$z_1 = 2(d_1^2 + d_2^2 - 1) + \frac{1}{2}(d_3^2 + d_4^2 - 1). \quad (18)$$

La variabilidad en conjunto del vector $\hat{\delta}$ se puede caracterizar utilizando la matriz de covarianza

where ν is the number of degrees of freedom of the spectral estimates and the bias or tendency depends inversely on the number of degrees of freedom. If this number of degrees of freedom is sufficiently large (>25), it can be argued that the behaviour of the statistical variability is Gaussian and the bias negligible. In this work, the spectral estimators with which the four restrictions are formed come from spectra with 32 degrees of liberty.

If the bias caused by the cross products is ignored, then

and, for example,

This expression is reduced (ignoring the higher than quadratic terms) to:

where (Long, 1980):

The variability of vector $\hat{\delta}$ can be characterized using the covariance matrix

$$V_{ij}(\underline{d}) = Cov(\hat{\delta}_i, \hat{\delta}_j) = Cov(\epsilon_i, \epsilon_j), \quad (19)$$

cuyos elementos son dados por Long (1980), de cuyos elementos la ecuación (18) es un ejemplo (i.e. V_{11}).

whose elements are given by Long (1980), from which equation (18) is an example (i.e. V_{11}).

Long y Hasselmann (1979) argumentan que los valores de $\hat{\underline{\delta}}$ (despreciando el sesgo) siguen el comportamiento de una distribución conjunta Gaussiana:

Long and Hasselmann (1979) argue that the values of $\hat{\underline{\delta}}$ (ignoring the bias) follow the behaviour of a joint Gaussian distribution:

$$P(\hat{\underline{\delta}}) = \frac{1}{(2\pi)^2 |V|^{1/2}} e^{-[(\hat{\underline{\delta}} - \underline{d})^T V^{-1} (\hat{\underline{\delta}} - \underline{d})]^{1/2}}, \quad (20)$$

donde V es la matriz de covarianza que depende de \underline{d} y la variable

where V is the covariance matrix which depends on \underline{d} and the variable

$$\tau^2 = \epsilon^T V^{-1} \epsilon$$

es una variable chi-cuadrada de cuatro grados de libertad.

is a chi-squared variable of four degrees of freedom.

Para el caso particular del vector de datos $\hat{\underline{\delta}}$, el criterio de optimización o ajuste, es el de minimizar la variable

For the particular case of the data vector $\hat{\underline{\delta}}$, the criterion for optimization or fit is to minimize the variable

$$\tilde{\tau}^2 = (\hat{\delta} - \tilde{d})^T \tilde{V}^{-1} (\hat{\delta} - \tilde{d}), \quad (21)$$

en donde el vector \tilde{a} es un vector en un espacio vectorial de cuatro dimensiones pero pertenece a una familia definida por dos parámetros α y $\tilde{\mu}$ y que puede ser representado por:

where \tilde{a} is a vector in a four dimensional space but belongs to a family defined by two parameters α and $\tilde{\mu}$, which can be represented by:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1 &= \int \cos \theta D(\theta; \tilde{\alpha}, \tilde{\mu}) d\theta = \hat{\delta}_1 - e_1, \\ \tilde{d}_2 &= \int \sin \theta D(\theta; \tilde{\alpha}, \tilde{\mu}) d\theta = \hat{\delta}_2 - e_2, \\ \tilde{d}_3 &= \int \cos 2\theta D(\theta; \tilde{\alpha}, \tilde{\mu}) d\theta = \hat{\delta}_3 - e_3, \\ \tilde{d}_4 &= \int \sin 2\theta D(\theta; \tilde{\alpha}, \tilde{\mu}) d\theta = \hat{\delta}_4 - e_4. \end{aligned} \quad (22)$$

Este ajuste es un proceso de mínimos cuadrados pesados que involucra en forma implícita a la parte predicha de $\hat{\delta}$, o sea $\hat{\alpha}$ ya que ésta define el punto donde se calcula la matriz $\nu - \nu(\hat{\alpha})$, por lo que resulta un ajuste alineal y queda incierto el número de grados de libertad o el comportamiento de la variable $\tilde{\tau}$.

En el caso en que ν fuese fija o independiente de $\hat{\alpha}$, se tiene un caso lineal y la variable $\tilde{\tau}$ se comporta como una chi-cuadrada de dos grados de libertad. Se puede pensar de manera informal, que de los cuatro grados de libertad de $\tilde{\tau}$ dos se han utilizado para determinar α y μ . Long (1980) utiliza en sus cálculos $\nu - \nu(\hat{\alpha})$, por lo que lineariza un problema alineal. En este caso se analizará el problema alineal, por lo que se recurrirá a promedios sobre datos sintéticos para determinar la caracterización de la variable $\tilde{\tau}$.

2.4. Resultados con datos sintéticos

Con el objeto de conocer el comportamiento de la variable $\tilde{\tau}$, para el caso particular de $\nu - \nu(\hat{\alpha})$, se produjeron casos sintéticos, y se procedió de la forma que a continuación se explica.

Se eligió el modelo VM ecuación (5), que al sustituirlo en (2) se obtiene las soluciones correspondientes del sistema (12). Se sustituyen los valores de los parámetros, de tal modo, que para cada pareja (a, μ) de prueba se tienen los correspondientes vectores \underline{d} y matriz $V = V(\underline{d})$. Con una subrutina que genera números al azar $((\epsilon_i), i = 1, 2, 3, 4)$ estadísticamente independientes con una distribución normal y con varianza unitaria

$$Cov(\underline{\delta} \underline{\delta}^T) = I$$

se construye el vector:

$$\underline{\epsilon} = \sqrt{\lambda_1} \delta_1 \underline{u}_1 + \sqrt{\lambda_2} \delta_2 \underline{u}_2 + \sqrt{\lambda_3} \delta_3 \underline{u}_3 + \sqrt{\lambda_4} \delta_4 \underline{u}_4$$

donde $(\lambda_i; i = 1, 2, 3, 4)$ son los eigenvalores (positivos) y $(\underline{u}_i; i = 1, 2, 3, 4)$ son los eigenvectores de la matriz $V = V(\underline{d})$ con lo que por construcción se tiene:

This is a weighted least squares fit which implicitly involves the predicted part of $\hat{\delta}$, that is $\hat{\alpha}$ since it defines the point where the matrix $\nu - \nu(\hat{\alpha})$ is calculated. Therefore, this is a non-linear fit and the number of degrees of freedom or the behaviour of the variable $\tilde{\tau}$ remain uncertain.

In the event that ν were fixed or independent of $\hat{\alpha}$, this would be a linear case and the variable $\tilde{\tau}$ would behave like a chi-squared of two degrees of freedom. It can be thought that, of the four degrees of freedom of $\tilde{\tau}$, two have been used to determine α and μ . Long (1980) uses $\nu - \nu(\hat{\alpha})$ in his calculations, thus linearizing a non-linear problem. In this case the non-linear problem will be analysed and, thus, averages on synthetic data will be used in order to determine the characterization of the variable $\tilde{\tau}$.

2.4. Results with synthetic data

In order to know the behaviour of the variable $\tilde{\tau}$, for the particular case of $\nu - \nu(\hat{\alpha})$, synthetic cases were produced and we proceeded as explained below.

The VM model equation (5) was chosen. If it is substituted in (2), the corresponding solutions of system (12) are obtained. The values of the parameters are substituted in such a way that for each test pair (a, μ) one has the corresponding vectors \underline{d} and matrix $V = V(\underline{d})$. With random numbers $((\epsilon_i), i = 1, 2, 3, 4)$ which are statistically independent and follow a Gaussian distribution of zero mean and unitary variance so

the following vector is obtained:

where $(\lambda_i; i = 1, 2, 3, 4)$ are the eigenvalues (positive) and $(\underline{u}_i; i = 1, 2, 3, 4)$ are the eigenvectors of the matrix $V = V(\underline{d})$. Then by definition:

$$E(\underline{\epsilon}\underline{\epsilon}^T) = V$$

y la variable

and the variable

$$\underline{\epsilon}^T V^{-1} \underline{\epsilon} = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2$$

es una variable al azar con el comportamiento de una chi-cuadrada de cuatro grados de libertad.

is a random variable with the behaviour of a chi-squared of four degrees of freedom.

En esta forma se tiene un mecanismo que genera una variabilidad estadística con cada vector \underline{d} , con los que se construye el vector dado por la expresión (13).

In this way one has a mechanism to generate statistical variability for each vector \underline{d} , with which the vector in expression (13) is obtained.

Ahora nos interesa qué tan bien podemos determinar \underline{d} (o equivalentemente a y μ) si sólo se utilizan los valores del vector \underline{a} y la expresión analítica de $V=V(\underline{d})$. Esto es, se desea encontrar dos sumandos que reproduzcan $\hat{\underline{d}}$ (ver ec. 13) donde uno de ellos, denominado $\underline{\tilde{a}}$ y el otro \underline{e} están definidos en el siguiente sistema de ecuaciones:

Now, we are interested in knowing how well \underline{d} (or equivalently a and μ) can be determined if only the values of the vector \underline{a} and the analytical expression $V=V(\underline{d})$ are used. That is, one wishes to find two addends that reproduce $\hat{\underline{d}}$ (see eq. 13) where one of them, denominated $\underline{\tilde{a}}$ and the other \underline{e} are defined in the following system of equations:

$$\delta_1 = d_1 + \epsilon_1 = \frac{I_1(\tilde{a})}{I_0(\tilde{a})} \cos \tilde{\mu} + e_1 = \tilde{d}_1 + e_1$$

$$\delta_2 = d_2 + \epsilon_2 = \frac{I_1(\tilde{a})}{I_0(\tilde{a})} \text{sen} \tilde{\mu} + e_2 = \tilde{d}_2 + e_2$$

$$\delta_3 = d_3 + \epsilon_3 = \frac{I_2(\tilde{a})}{I_0(\tilde{a})} \cos 2\tilde{\mu} + e_3 = \tilde{d}_3 + e_3$$

$$\delta_4 = d_4 + \epsilon_4 = \frac{I_2(\tilde{a})}{I_0(\tilde{a})} \text{sen} 2\tilde{\mu} + e_4 = \tilde{d}_4 + e_4$$

donde a y μ son parámetros desconocidos. Para determinarlos se utiliza un proceso iterativo por el cual se halla el mínimo de la variable

where a and μ are unknown parameters. They are determined by an iterative process minimizing the variable

$$\tilde{\tau}^2 = \underline{e}^T V^{-1}(\tilde{a}) \underline{e}.$$

Para cada pareja a, μ este procedimiento se efectuó 75 veces y la Tabla I muestra los valores de la media y la varianza calculadas para cada pareja.

Los valores presentados fueron calculados a partir de

$$\frac{1}{75} \sum_{i=1}^{75} \tilde{\alpha}_i; \frac{1}{75} \sum_{i=1}^{75} (\tilde{\alpha}_i - a)^2; \frac{1}{75} \sum_{i=1}^{75} (\tilde{\mu}_i - \mu)^2.$$

Se puede observar que si el valor elegido del parámetro a es pequeño, el valor promedio estimado también lo es y la desviación estándar de las estimaciones de la dirección es alta.

La Figura 2 muestra la distribución de probabilidad acumulativa de las variables

$$\tau^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = \epsilon^T V^{-1} \epsilon$$

(identidad por construcción de ϵ), que debe de comportarse como una chi-cuadrada de cuatro grados de libertad y

For each pair a, μ this process was done 75 times and Table I shows the mean and variance values calculated for each pair.

The values presented were calculated from

It can be seen that when the value of parameter a is small, the average of estimates is also small and that the standard deviation of the direction estimations is high.

Figure 2 shows the cumulative probability distribution of the variables

(identity by definition of ϵ), which should behave like a chi-squared of four degrees of freedom and

$$\tilde{\tau}^2 = e^T V_{(d)}^{-1} e$$

del cual nos interesa caracterizar su comportamiento. Se observa en la Figura 2, que a pesar de ser un ajuste alineal esta última variable ($\tilde{\tau}^2$), que es una medida del desajuste, se comporta como una variable chi-cuadrada de dos grados de libertad. En la misma Figura 2 se grafica el comportamiento exacto de las variables chi-cuadrada de cuatro y dos grados de libertad.

De lo anteriormente expuesto se presenta el valor límite de 3.3 como un valor de confianza al 80%. Todos los ajustes tales que $\tilde{\tau}^2 < 3.3$ serán no rechazados, ya que es altamente probable (>80%) que el desajuste sea debido a la variabilidad estadística. Cualquier ajuste tal que $\tilde{\tau}^2 > 3.3$ implica que si el modelo estimado fuese el real, la probabilidad de obtener tanta variabilidad es muy poca (<20%), en cuyo caso el modelo es rechazado.

from which we are interested in characterizing its behaviour. In Figure 2 it can be seen that even though the variable $\tilde{\tau}^2$ is a non-linear fit, which is a measure of the misfit, it behaves like a chi-squared variable of two degrees of freedom. The exact behaviour of the chi-squared variables of four and two degrees of freedom is also plotted in Figure 2.

From the above the limiting value 3.3 is presented as an 80% confidence value. All the fits such that $\tilde{\tau}^2 < 3.3$ will not be rejected since it is highly probable (>80%) that the misfit is due to statistical variability. Any fit such that $\tilde{\tau}^2 > 3.3$ implies that if the estimated model is the real one, the probability of obtaining so much variability is very low (<20%) and, therefore, the model is rejected. •

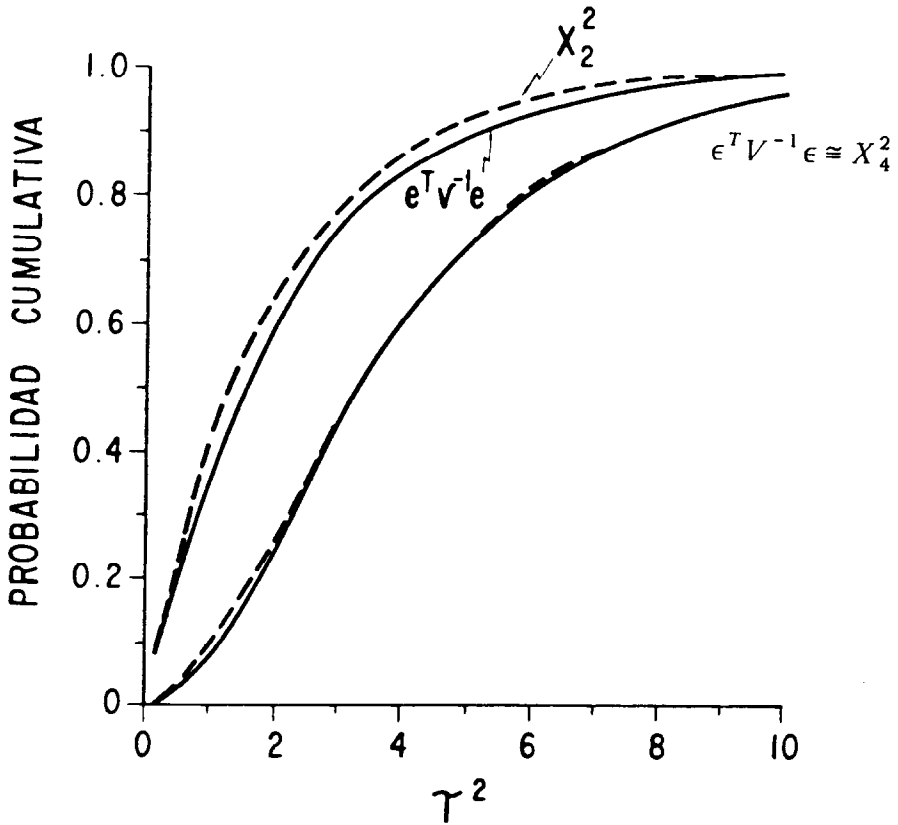


Figura 2. Gráfica de la distribución de probabilidad acumulativa de las variables

$$\tilde{\tau}^2 = e^T V^{-1} e \quad , \quad \tau^2 = \epsilon^T V^{-1} \epsilon$$

y chi-cuadrada con cuatro y dos grados de libertad.

Figure 2. Plot of the cumulative probability distribution of the variables

$$\tilde{\tau}^2 = e^T V^{-1} e \quad , \quad \tau^2 = \epsilon^T V^{-1} \epsilon$$

and the chi-squared with four and two degrees of freedom.

Tabla I. Valor promedio y desviación estándar del parámetro de directividad y desviación estándar de la dirección estimada, después de efectuar pruebas con 75 valores.

Table I. Mean value and standard deviation of the directivity parameter and standard deviation of the estimated direction, after tests with 75 values.

α	$\langle \bar{\alpha} \rangle$	$\langle (\bar{\alpha} - \alpha)^2 \rangle^{1/2}$	$\langle (\tilde{\mu} - \mu)^2 \rangle^{1/2}$ (en grados)
0.01	.33	.38	106
0.05	.34	.35	97
0.10	.34	.29	79
0.50	.60	.29	33
1.00	1.01	.27	14
2.00	2.04	.36	8
3.00	3.04	.55	5
5.00	4.91	.82	3
7.00	6.88	1.37	3
9.00	9.01	2.28	2

Con el propósito de hacer notar las diferencias entre el modelo de LY y el de VM, se procedió a utilizar el modelo de LY ecuación (10) en el sistema de ecuaciones (2), dando por resultado la versión correspondiente del sistema (22). Se generó una función unimodal exacta con su valor máximo en $\mu = 0$, por lo cual las ecuaciones impares de este sistema son nulas y quedan sólo dos restricciones a las cuales se les ajustó el modelo de VM ecuación (5) con la restricción de minimizar la variable $\tilde{\tau}$.

La Tabla II muestra en sus dos primeras columnas las dos restricciones no nulas $d_1 = \beta$, $d_3 = \beta^2$ (ver ec. 12) acordes con el modelo de LY para $\mu = 0$; la tercera columna da la medida de la dispersión σ_{iv} . Se puede observar que cuando el valor de las restricciones δ 's es pequeño, la dispersión es grande. Las columnas 5 y 6 representan los valores $\hat{\delta}_1 = I_1/I_0$; $\hat{\delta}_3 = I_2/I_0$ del modelo de Von Mises ajustado. La columna 7 es la dispersión del modelo ajustado y la última columna es la variable $\tilde{\tau}$ que mide el grado de ajuste.

In order to point out the differences between the LY and VM models, we proceeded to use the LY model equation (10) in the system of equations (2), resulting in the corresponding version of system (22). An exact unimodal function was generated with its maximum value in $\mu = 0$. Thus, the odd-numbered equations of this system are null and only two restrictions remain which were fitted to the VM model equation (5) with the restriction of minimizing the variable $\tilde{\tau}$.

The two non-null restrictions $d_1 = \beta$, $d_3 = \beta^2$ (see eq. 12) in agreement with the LY model for $\mu = 0$ are shown in the first two columns of Table II. The third column gives the measure of the dispersion σ_{iv} . It can be seen that when the value of the restrictions δ 's is small, the dispersion is large. Columns 5 and 6 represent the $\hat{\delta}_1 = I_1/I_0$; $\hat{\delta}_3 = I_2/I_0$ values of the fitted Von Mises model. Column 7 is the dispersion of the fitted model and the last column is the $\tilde{\tau}$ variable which measures the degree of fit.

Tabla II. Las dos primeras columnas indican las dos restricciones no nulas del modelo LY, $d_1 = \beta$, $d_3 = \beta^2$. La tercera columna es la medida de la dispersión σ_{LY} . La cuarta columna es la directividad α , la quinta y la sexta columnas son \tilde{a}_1 y \tilde{a}_3 , ajustados. La séptima columna es la dispersión σ_{VM} del modelo ajustado y la última columna es la variable que mide el grado de ajuste.

Table II. The first two columns indicate the two non-null restrictions of the LY model, $d_1 = \beta$, $d_3 = \beta^2$. The third column is the measure of the dispersion σ_{LY} . The fourth column is the directivity α , the fifth and sixth columns are the fitted \tilde{a}_1 and \tilde{a}_3 . The seventh column is the dispersion σ_{VM} of the fitted model and the last column is the variable which measures the degree of the fit.

β	β^2	σ_{LY}	$\tilde{\alpha}$	\tilde{d}_1	\tilde{d}_3	σ_{VM}	$\tilde{\tau}^2$
.10	.01	40.3	.20	.10	.00	40.4	.00
.20	.04	39.7	.40	.19	.02	40.1	.01
.30	.09	38.6	.61	.29	.04	39.6	.07
.40	.16	37.1	.83	.38	.07	38.9	.23
.50	.25	35.0	1.07	.46	.11	38.0	.60
.55	.30	33.8	1.19	.50	.14	37.5	.91
.60	.36	32.4	1.32	.54	.16	36.9	1.34
.65	.42	30.7	1.46	.58	.19	36.3	1.90
.70	.49	28.9	1.61	.62	.22	35.6	2.65
.73	.53	27.6	1.71	.64	.24	35.1	3.20
.80	.64	24.3	1.98	.69	.29	33.9	4.84
.90	.81	17.6	2.57	.77	.39	31.4	8.15
.98	.96	8.0	4.16	.87	.58	26.1	11.01

Es notorio el hecho de que el modelo de VM determina efectivamente el ángulo, en este caso $\mu = 0$, y sin embargo el ajuste es pobre cuando la dispersión es pequeña. Es decir, el modelo estima correctamente el ángulo preferencial de propagación aunque el modelo sea rechazado estadísticamente. Esto indica que cuando la función D tenga dispersión pequeña el ajuste rechaza modelos equivocados (aun cuando éstos sean unimodales simétricos), y cuando la dispersión es grande ($\sigma > 30^\circ$) cualquier modelo tendrá aceptación.

The fact that the VM model effectively determines the angle, in this case $\mu = 0$, is clear, and yet the fit is poor when the dispersion is small. That is, the model estimates correctly the preferential propagation angle even though the model is statistically rejected. This indicates that when the function D has a small dispersion, the fit rejects erroneous models (even when they are symmetrical unimodals), and when the dispersion is large ($\sigma > 30^\circ$) any model will be accepted.

3. DATOS DE CAMPO

3.1. Descripción y antecedentes del área de estudio

La zona de estudio es una región costera que se encuentra en la parte noroeste del Golfo de California, en una de las puntas rocosas que protegen la parte norte del puerto de San Felipe, B.C., conocida como Punta El Machorro, con coordenadas 31°04' N y 114°48' W (Fig. 3). La profundidad promedio a la que se instaló el instrumento fue 9 m y las características geomorfológicas fueron determinantes para la elección del lugar, ya que las olas que arriban a esa punta, no tienen, presumiblemente, deformaciones causadas por interacciones con islas o zonas someras alejadas de la costa. Larios-Castillo (1989) presenta una descripción detallada de la técnica de instalación y del anclaje utilizado.

Son varios los trabajos que se han efectuado al norte de esta región (Komar, 1969; Cruz-Falcón, 1983; Peña, 1986). Estos trabajos reportan que el oleaje predominante tiene períodos que oscilan entre los 3 y 4.5 segundos, con la presencia de oleaje poco energético entre los 10 y 15 segundos, y que los vientos predominantes obedecen a los sistemas de brisas de esa región.

3.2. Descripción de los instrumentos

El aparato fabricado por la compañía Sea Data, modelo 635-12, es un instrumento que funciona con baterías y efectúa grabaciones en formato digital en cintas magnéticas, de señales provenientes de: un sensor de presión, un correntímetro de inducción electromagnética y una brújula. Delgado-González (1988) presenta una descripción más detallada de cada sensor.

3.3. Series de tiempo

Se trabajó con series de tiempo de las fluctuaciones de presión de la columna de agua y las componentes horizontales u y v del campo de velocidades. Se cuenta con series de datos que se obtuvieron cada cuatro horas a partir del 26 de mayo al 19 de junio de 1984, Salvo en el primero y último día de observaciones en los que sólo se tienen tres registros.

3. FIELD DATA

3.1. Description and antecedents of the study area

The study area is a coastal region located in the northwestern part of the Gulf of California, in one of the rocky points which protect the northern part of the port of San Felipe, B.C., known as Punta El Machorro, with coordinates 31°04' N and 114°48' W (Fig. 3). The instrument was installed at an average depth of 9 m. The geomorphological characteristics were a determining factor in choosing the site since the waves arriving at that point do not have, presumably, deformations caused by interactions with islands or shallow zones offshore. Larios-Castillo (1989) presents a detailed description of the installation technique and anchorage used.

Several works have been carried out in the northern part of this region (Komar, 1969; Cruz-Falcón, 1983; Peña, 1986). These authors report that the predominant wind waves have periods which oscillate between 3 and 4.5 seconds, with the presence of not very energetic wind waves between 10 and 15 seconds, and that the predominant winds obey the sea breeze regimes for that region.

3.2. Description of the instrumentation

The instrument, manufactured by the Sea Data Company (model 635-12), operates on batteries and digitally records on magnetic tapes signals from: a pressure sensor, an electromagnetic induction current meter and a compass. Delgado-González (1988) gives a detailed description of each sensor.

3.3. Time series

We worked with time series of fluctuations of pressure of the water column and the u and v horizontal components of the velocity field. Series of data were obtained every four hours from 26 May to 19 June, 1984. On the first and last day, however, only three records were obtained.

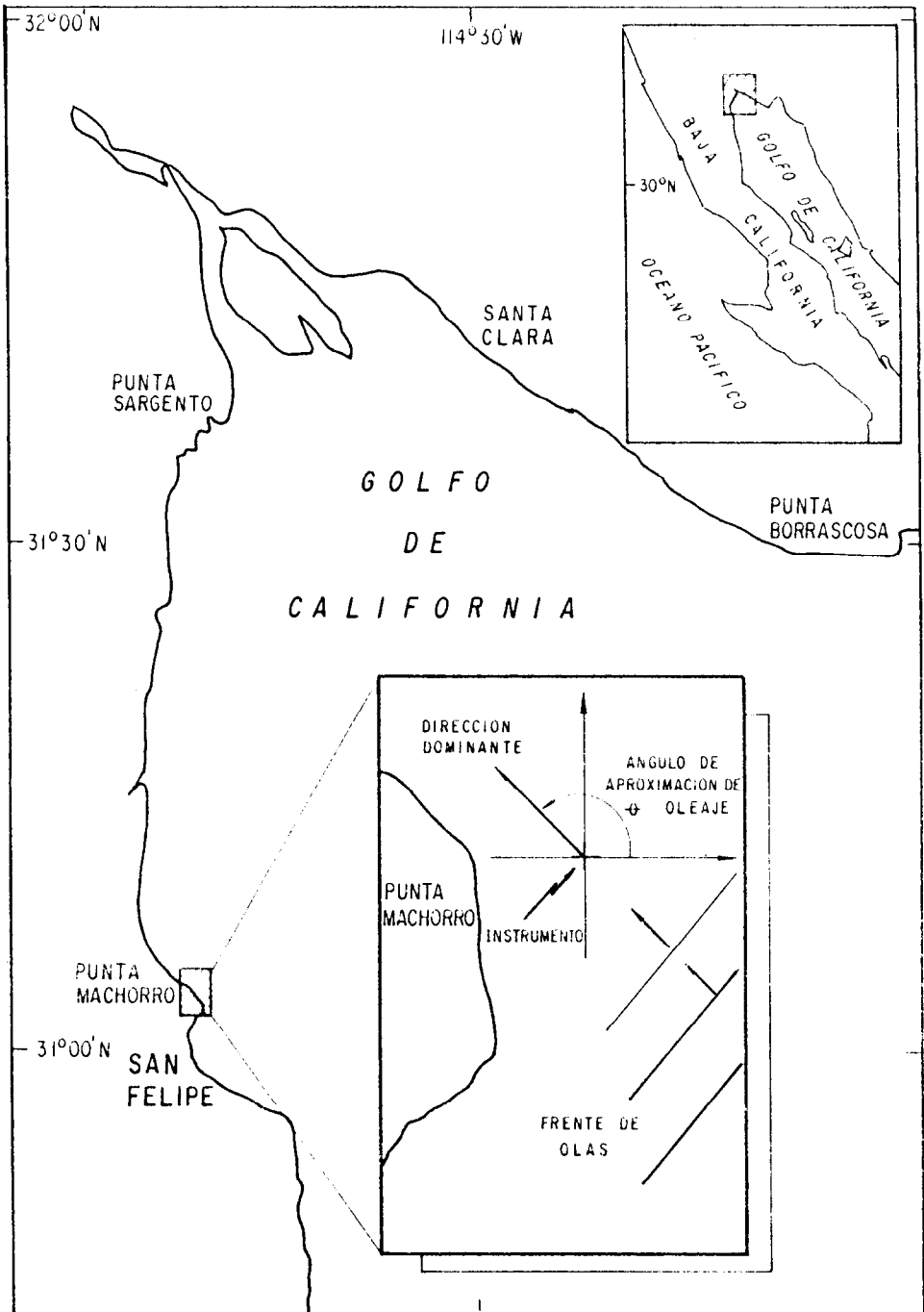


Figura 3. Localización del área de estudio y definición del ángulo de propagación del oleaje θ .
Figure 3. Location of the study area and definition of the propagation angle of wind waves θ .

Cada registro consiste de medidas simultáneas de presión (p), componente de la velocidad en la dirección S-N (v) y componente de la velocidad en la dirección O-E (u) cada 0.5 segundos durante 516 segundos (1032 triadas consecutivas). La Figura 4 presenta las características de estas series. Larios-Castillo (1989) efectuó el análisis de calidad a los datos aquí utilizados, y a partir de éste se eligieron los días en que la señal de presión mostraba oleaje con mayor cantidad de energía.

3.4. Obtención de los espectros cruzados

Las series de tiempo se transformaron al dominio de frecuencia, utilizando la transformada rápida de Fourier. Se usaron 1024 datos de los 1032 originales, obteniéndose 512 bandas independientes con una frecuencia de Nyquist de 1. Hz y un ancho de banda fundamental de .0019 Hz. Previo a utilizar la transformada de Fourier, a las series de tiempo se les resta la media y tendencia y son multiplicadas por una ventana coseno que elimina paulatinamente a cero un 10% de los extremos, la disminución de energía por esta ventana es reincorporada posterior a la transformación. Con el propósito de obtener estabilidad en las estimaciones espectrales, se efectuaron promedios de 16 bandas fundamentales, generándose 32 estimaciones espectrales con un nuevo ancho de banda de 0.032 Hz y con 32 grados de libertad cada una.

3.5. Resultados y Discusión

Durante el experimento, sólo cuatro días presentaron condiciones con oleaje que permiten considerarlos energéticos con respecto a los demás (Larios-Castillo, 1989). De éstos, se eligieron sólo tres para presentarse en este trabajo, pues fueron eventos consecutivos iniciándose el 4 de junio y terminando el 6 de junio. Las Figuras 5, 6 y 7 corresponden a dichos días y presentan los espectros de energía de las fluctuaciones de presión (sin compensar la atenuación de la señal debido a la columna de agua, línea continua), y el resultado de ajustar el modelo direccional VM. La línea punteada representa $\bar{\mu}$, la dirección preferencial de propagación del oleaje en grados; y la línea gruesa σ , el promedio de la concentración angular de la energía. La dirección reportada en estas figuras, es referida al eje positivo de las x y crece en el sentido

Each record consists of simultaneous measurements of pressure (p), velocity component in a S-N direction (v) and velocity component in a W-E direction (u) every 0.5 seconds during 516 seconds (1032 consecutive triplets). The characteristics of these samples are presented in Figure 4. Larios-Castillo (1989) analysed the quality of the data used herein, and, from these, we selected the days in which the most energetic wind waves were recorded.

3.4. Obtaining the cross spectra

The time series were transformed to the frequency domain using the Fast Fourier Transform. Of the original 1032 data, 1024 were used, obtaining 512 independent bands with a Nyquist frequency of 1. Hz and a fundamental bandwidth of .0019 Hz. Prior to using the Fourier transform, the mean and tendency were subtracted from the time series and multiplied by a cosine window which gradually diminishes to zero 10% of the extremes. The loss of energy by this operation is restored after the transformation. In order to obtain stability in the spectral estimates, averages of 16 fundamental bands were computed, obtaining 32 spectral estimates with a new bandwidth of 0.032 Hz and with 32 degrees of freedom each.

3.5. Results and Discussion

During the experiment, only four days showed wind wave conditions which could be considered energetic relative to the others (Larios-Castillo, 1989). Of these, only three were chosen for this work, since they were consecutive events beginning on 4 June and ending on 6 June. The energy spectra of the pressure fluctuations (without compensating attenuation of the signal due to the water column, continuous line), and the result of fitting the directional VM model are presented for these three days in Figures 5, 6 and 7. The dotted line represents $\bar{\mu}$, the preferential propagation direction of wind waves in degrees, and the thick line σ , the average of the angular concentration of the energy. The direction shown in these figures refers to the positive axis of the x and increases in an anticlockwise direction, indicating the direc-

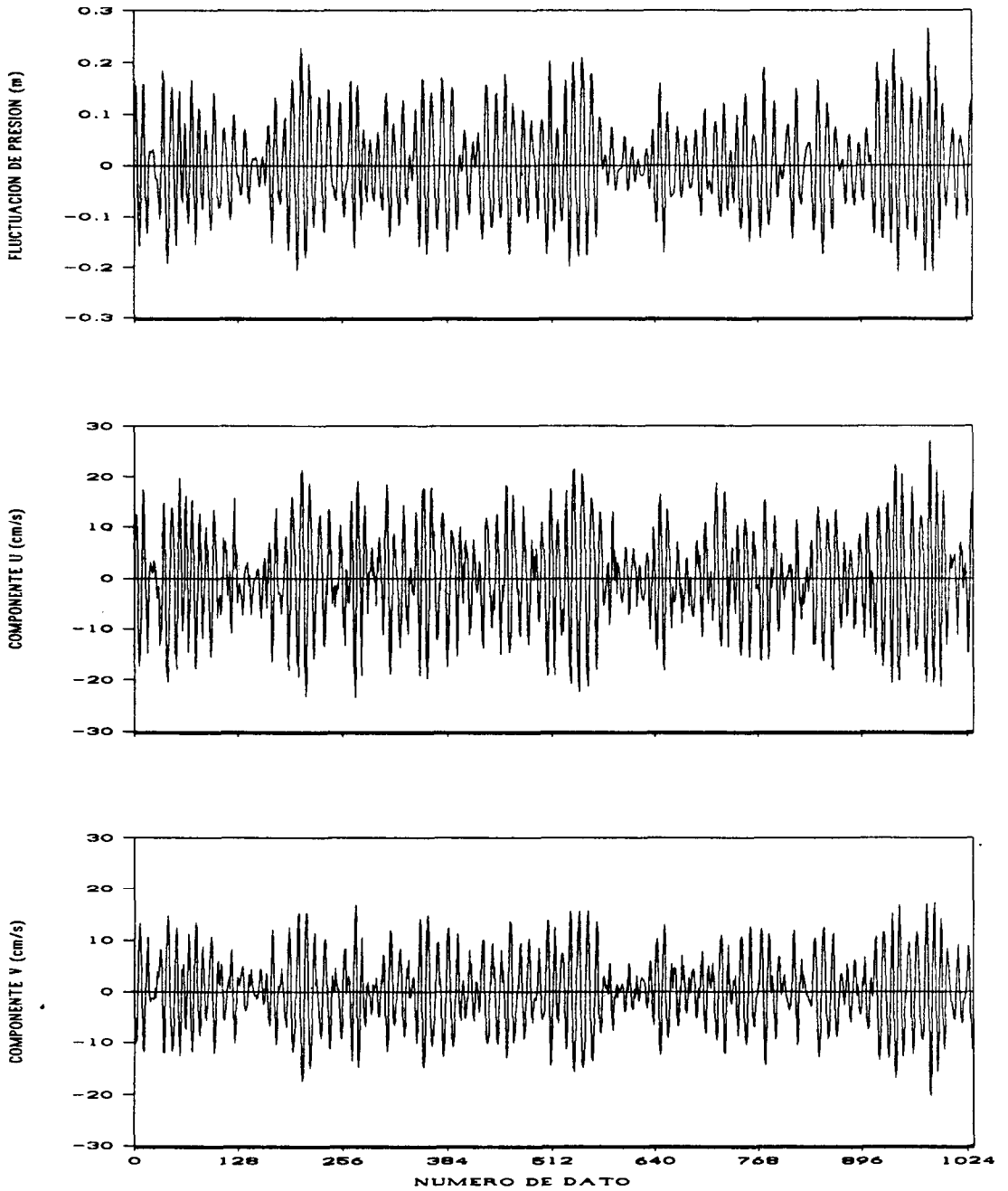


Figura 4. Series de tiempo de las fluctuaciones de presión y componentes horizontales de velocidad.

Figure 4. Time series of the fluctuations of pressure and horizontal velocity components.

Delgado-González, O. y Ochoa, J.- Espectro direccional del oleaje

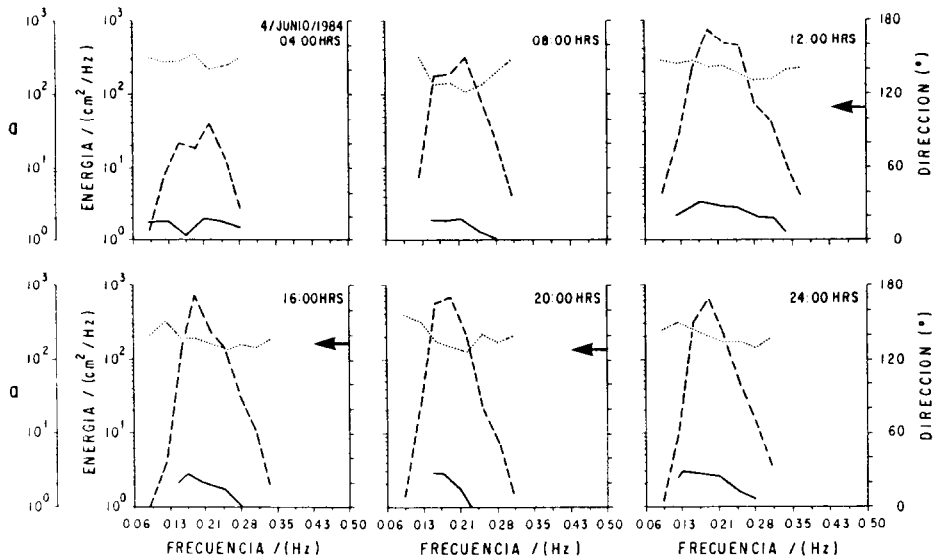


Figura 5. Gráficas de la dirección estimada por el modelo VM para el 4 de junio de 1984. Línea punteada representa la dirección preferencial, línea segmentada es una medida de la energía, y línea continua el parámetro de directividad, a . La flecha indica la dirección del viento presente en esa hora.

Figure 5. Plots of the direction estimated by the VM model for 4 June, 1984. The dotted line represents the preferential direction, the broken line is a measure of the energy and the continuous line the directivity parameter, a . The arrow indicates the direction of the wind at that time.

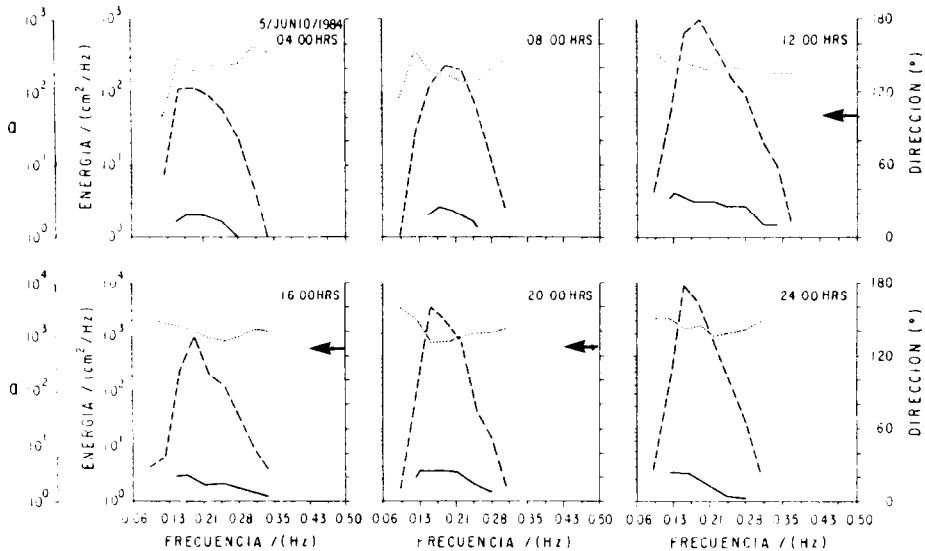


Figura 6. Gráficas de la dirección estimada por el modelo VM para el 5 de junio de 1984. Significado de las líneas similar a la Figura 5.

Figure 6. Plots of the direction estimated by the VM model for 5 June, 1984. The lines represent the same as in Figure 5.

contrario a las manecillas del reloj, indicando hacia donde va el oleaje. El ángulo mostrado en las Figuras 5, 6 y 7 concuerda con el ángulo del viento reportado por Delgado-González (1988). En las 12:00, 16:00 y 20:00 horas de estas figuras se incluye una pequeña flecha que representa la dirección del viento. Sólo se presentan estas horas por corresponder con los registros con vientos de mayor intensidad, con una velocidad máxima promedio de 755 cm/s. Considerando que pueden existir diferencias de varias decenas de grados entre uno y otro (Donelan *et al.*, 1985), la dirección de propagación del oleaje encontrada es consistente con la de estos vientos.

La interpretación de la dirección debe hacerse con cautela, ya que valores bajos en el parámetro a (< 1), son indicadores de una definición pobre en el sentido de propagación del oleaje. A medida que $a \rightarrow 0^+$ el oleaje proviene uniformemente de todas direcciones. En las Figuras 5, 6 y 7 sólo se muestran los valores cuando $a \geq 1$, pues no tiene mucho sentido hablar de la dirección predominante cuando la dispersión es tan alta ($a < 1$). Congruente con lo anterior, en altas frecuencias, donde la energía es baja, el parámetro a es pequeño, y $\bar{\mu}$ la "dirección" sufre cambios que no tienen sentido entre bandas de frecuencia contiguas (pues a es pequeña).

La dirección presentada en Figuras 5, 6 y 7 es un resultado que se encuentra con el modelo VM, similar a la encontrada al ajustar cualquier otro modelo con dos parámetros, modelos LY y CG (Tabla III).

En el caso de las Figuras 5, 6 y 7 los valores de $\bar{\tau}^2$ encontrados en el ajuste, son mayores que el valor límite correspondiente, $\bar{\tau}^2 > 3.3$ por lo que aunque la dirección preferencial concuerda con lo esperado por el viento, los modelos deben rechazarse en el sentido estadístico.

A pesar de que la forma geométrica de los tres modelos utilizados es similar (para $\sigma \leq 35^\circ$, ver Fig. 1), al efectuar los ajustes a las cuatro restricciones dadas por \hat{Q} con la restricción de minimizar $\bar{\tau}^2$, se encuentra que el modelo LY puede ajustarse mejor, es decir el valor numérico de $\bar{\tau}^2$ es menor comparado contra el VM y CG (ver Tabla III).

tion of the wind waves. The angle shown in Figures 5, 6 and 7 agrees with the angle of the wind reported by Delgado-González (1988). In these figures, at 12:00, 16:00 and 20:00 hours, a small arrow indicates the direction of the wind. Only the data obtained at these times are presented as they correspond to the records of most intense winds, with a maximum mean velocity of 755 cm/s. Considering that there can be differences of several degrees between one and another (Donelan *et al.*, 1985), the propagation direction of wind waves found is consistent with that of the winds.

The interpretation of direction should be done carefully, since low values of the parameter a (< 1) are indicative of a poor definition in the directional distribution of wind waves. As $a \rightarrow 0^+$ the wind waves come uniformly from all directions. In Figures 5, 6 and 7, only values with $a \geq 1$ are shown, as it would be meaningless to talk of predominant direction when the dispersion is so high ($a < 1$). Consistent with the above, in high frequencies, when the energy is low the parameter a is small, and $\bar{\mu}$ the "direction" suffers very doubtful changes between contiguous frequency bands (since a is small).

The direction presented in Figuras 5, 6 and 7 is a result of the VM model, similar to that found by fitting any other model with two parameters, LY and CG models (Table III).

In the case of Figuras 5, 6 and 7, the values of $\bar{\tau}^2$ found in the fit are higher than the corresponding limiting value, $\bar{\tau}^2 > 3.3$ and, thus, even though the preferential direction agrees with that expected from the wind, the models should be rejected on statistical grounds.

Even though the geometric form of the three models used is similar (for $\sigma \leq 35^\circ$, see Fig. 1), when fitting the four restrictions given by \hat{Q} by minimizing $\bar{\tau}^2$, it is found that the LY model fits better, that is, the numerical value of $\bar{\tau}^2$ is lower compared to VM and CG (see Table III).

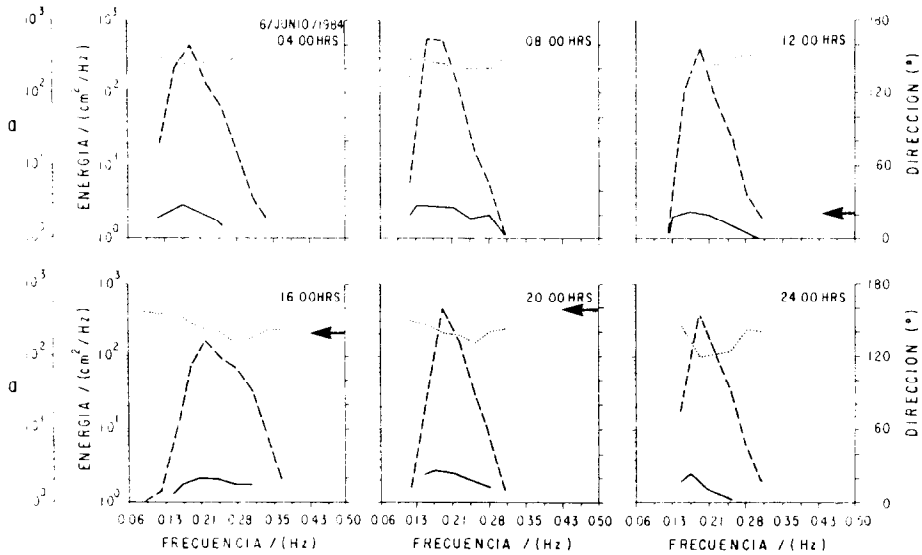


Figura 7. Gráficas de la dirección estimada por el modelo de VM para el 6 de junio de 1984. Significado de las líneas similar a la Figura 5.

Figure 7. Plots of the direction estimated by the VM model for 6 June, 1984. The lines represent the same as in Figure 5.

Tabla III. Tabla comparativa que muestra cómo los tres modelos con dos parámetros arrojan el mismo valor numérico para el ángulo estimado, mas no así para la variable que mide el grado de ajuste.

Table III. Comparative table showing how the three models with two parameters give the same numerical value for the estimated angle, but not for the variable which measures the degree of the fit.

Fre- cuencia Hz	Autoespectro de presión $S_{pp} \text{ cm}^2 / \text{Hz}$	Modelo de Von Mises		Modelo de Lygre		Modelo Coseno Generalizado	
		$\tilde{\mu}$	$\tilde{\tau}^2$	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\tau}^2$	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\tau}^2$
0.125	40.87	146.	18.4	146.	10.7	146.	28.8
0.153	638.90	141.	12.8	141.	13.2	141.	20.1
0.187	973.30	139.	14.4	139.	10.1	139.	22.1
0.218	419.43	136.	13.6	136.	8.0	136.	21.4
0.250	152.50	138.	15.1	138.	7.6	138.	23.9
0.281	87.61	139.	14.4	139.	6.5	139.	23.2
0.312	21.81	137.	19.3	137.	12.3	137.	27.7
0.343	9.22	138.	14.6	138.	7.9	138.	22.3

Es oportuno hacer notar que cuando la energía del oleaje es alta los tres modelos ajustados tienen muy poca diferencia en dirección preferencial y en dispersión estimada. En las frecuencias energéticas el espectro direccional es bastante concentrado alrededor de la dirección preferencial (el parámetro a del modelo VM es mayor que dos). Por lo tanto es posible que el rechazo de los modelos se deba al carácter altamente discriminatorio de la forma de $D(\theta)$ cuando la dispersión σ es pequeña (ver Tabla I). Se consideró también la posibilidad de la asimetría generada en la función $D(\theta)$ como resultado de la refracción; sin embargo, para refracción ocasionada por fondos con pendientes en sólo una dirección, los ajustes no manifestaron mejoría.

Dado que la variable \bar{r}^2 adquiere valores mayores al valor límite en forma consistente, (incluyendo a toda nuestra información y empleando los tres modelos) cabe la posibilidad de que la matriz V , que se deduce en forma teórica, sea una subestimación. Dos aspectos importantes de esta posible subestimación serían el ruido instrumental (despreciado *a priori*) y las expansiones binomiales, aspectos que se consideran apropiados en la deducción de la matriz V .

Cuando la energía es baja las observaciones indican que el parámetro σ es siempre alto. Esto es una coincidencia no del todo esperada, puesto que el oleaje aún con baja energía, puede tener una dispersión pequeña. Esto en conjunto con el rechazo estadístico del modelo implica que es de poco confiar la dirección preferencial que el ajuste presenta.

4. CONCLUSIONES

Los promedios de ajustes con datos sintéticos permiten analizar el comportamiento de la variable que mide la bondad de ajuste (\bar{r}^2). En forma general, ajustando espectros unimodales simétricos a las mediciones obtenidas cuando el espectro es de este tipo, la variable \bar{r}^2 será menor que 3.3 en un 80% de los casos. El comportamiento de \bar{r}^2 es muy aproximado a una variable chi-cuadrada de dos grados de libertad.

De los tres modelos ajustados, LY es marginalmente el que ofrece mejor ajuste a comparación de CG y VM.

It should be noted that when the energy of the wind waves is high, the preferential direction and the estimated dispersion are not very different for the three fitted models. The directional spectrum of the energetic frequencies is quite concentrated around the preferential direction (the parameter a of the VM model is greater than two). Therefore, it is possible that the models are rejected due to the highly discriminatory character of the form of $D(\theta)$ when the dispersion σ is small (see Table I). The possibility of the asymmetry generated in the function $D(\theta)$ as a result of refraction was also considered. However, for refraction caused by bottoms with slopes in only one direction, the fits did not improve.

In view of the fact that the variable \bar{r}^2 consistently has values higher than the limiting value (including all our information and using the three models), it may be possible that the matrix V , deduced theoretically, is underestimated. Two important aspects of this possible underestimation would be instrumental noise (ignored *a priori*) and the binomial expansions, aspects which are considered appropriate in the deduction of matrix V .

When the energy is low, the observations indicate that the parameter σ is always high. This is an unexpected coincidence, since wind waves, even with low energy, can have a small dispersion. This, together with the statistical rejection of the model, implies that the preferential direction presented by the fit is unreliable.

4. CONCLUSIONS

The averages of fits to synthetic data allow the analysis of the behaviour of \bar{r}^2 , a measure of the reliability of the fit. Generally, when fitting symmetric unimodal spectra to measurements obtained when the spectrum is of this type, the variable \bar{r}^2 will be lower than 3.3 in 80% of the cases. The behaviour of \bar{r}^2 is very close to a chi-squared variable of two degrees of freedom.

Of the three fitted models, LY marginally offers the best fit in comparison to CG and VM.

Ajustando los modelos unimodales simétricos a datos observados en el campo, es posible establecer que durante el período de mediciones no se presentaron condiciones de oleaje en las que éstos se puedan considerar adecuados.

By fitting symmetric unimodal models to data observed in the field, it is possible to establish that during the period of measurements, wind wave conditions did not occur in which these could be considered adequate.

English translation by Christine Harris.

LITERATURA CITADA

- Barstow, S. and Guddal, J. (1987). A global survey on the need for an application of directional wave information. World Meteorological Organization. WMO/TD-No. 209.
- Batschelet, E. (1981). Circular Statistics in Biology. (Chap. 15 and 16). Mathematics in Biology. Academic Press, London and New York.
- Borgman, L.E. (1969). Directional spectra models for design use for surface waves. Hydraulic Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, 52 pp.
- Borgman, L.E. (1979). Data Buoy Wave Measurements, Ocean Wave Climate. Plenum Press, New York and London, 368 pp.
- Cote, L.J., Davis, J.O., Wilbur, M., McGough, R., Mehr, E., Pierson, W.J. Jr., Ropek, J.K., Stephenson, G. and Vetter, R.C. (1960). The directional spectrum of a wind generated sea as determined from data obtained by the stereo wave observation project. Meteorological Papers, 2, No. 6: 85 pp.
- Cruz Falcón, A. (1983). La refracción del oleaje y la determinación del error en el ángulo de aproximación. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Marinas, Universidad Autónoma de Baja California.
- Delgado González, O.E. (1988). Aspectos direccionales del oleaje en San Felipe, B.C. Tesis de Maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, 64 pp.
- Donelan, M., Hamilton, J. and Hui, W.H. (1985). Directional spectra of wind-generated waves. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 315: 509-562.
- Goda, Y., Takayama, T. and Suzuki, Y. (1978). Diffraction diagrams for directional random waves. Proc. 16th Int. Conf. Coastal Eng., Hamburg, pp. 628-650.
- Jenkins, R.B. and Watts, D.G. (1968). Spectral analysis and its applications. Holden Day, 522 pp.
- Komar, P.D. (1969). 'The longshore transport of sand on beaches.' Ph.D. dissertation, University of California, 141 pp.
- Larios Castillo, S.I. (1989). La relación entre el oleaje y el viento a partir de observaciones en San Felipe, B.C. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Marinas, Universidad Autónoma de Baja California, 34 pp.
- Long, R.B. (1980). The statistical evaluation of directional spectrum estimates derived from pitch/roll buoy data. J. Phys. Ocean., 10: 944-952.
- Long, R.B. and Hasselmann, K. (1979). A variational technique for extracting directional spectra from multi-component wave data. J. Phys. Ocean., 9: 373-381.
- Longuet-Higgins, M.S., Cartwright, D.E. and Smith, N.D. (1963). Observations of the directional spectrum of the sea waves using the motions of a floating buoy. Ocean Wave Spectra, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., pp. 111-136.
- Lygre, A. and Krogtad, H.E. (1986). Maximum entropy estimation of the directional distribution in ocean wave spectra. J. Phys. Ocean., 16: 2052-2060.

- Mitsuyasu, H. and Rikkishi, K. (1975). Observation of the directional spectrum of waves using a clover-leaf buoy. *J. Phys. Ocean.*, 5: 750-760.
- Munk, W.H., Miller, G.R., Snodgrass, F.E. and Barber, N.F. (1963). Directional recording of swell from distant storms. *Proc. Roy. Soc. A.*, 255: 505-584.
- Nagata, Y. (1964). The statistical properties of orbital wave motions and their application for the measurement of directional wave spectra. *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, 19(4): 169-181.
- Ochoa, J. y Delgado-González, O.E. (1990). Pitfalls in the estimation of the wind wave directional spectra by variational principles. *Applied Ocean Research* (in press).
- Panicker, N.N. (1974). "Review of the techniques for directional wave spectra." *Proc. International Symposium on Ocean Wave Measurement and Analysis*, Am. Soc. Civ. Eng., New Orleans, 669-688 pp.
- Peña, H.G. (1986). Energía en la banda de infragravedad en la zona costera de San Felipe, B.C. Tesis de Maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, 122 pp.
- Phillips, O.M. (1958). The equilibrium range in the spectrum of wind-generated ocean waves. *J. Fluid Mech.*, 107: 465-485.
- Suzuki, Y. (1969). "Determination of approximate directional spectra for coastal waves." Report of the Port and Harbor Research Institute, Japan, 8: 43-101.
- Young, I.R., Hasselmann, S. and Hasselmann, K. (1987). Computations of the response of a wave spectrum to a sudden change in wind direction. *J. Phys. Ocean.*, 17: 1317-1338.