

## TASAS DE CRECIMIENTO Y ESCALAS DE BANCOS DE ARENA EN EL DELTA DEL RÍO COLORADO

### GROWTH RATES AND SCALES OF SAND BANKS IN THE COLORADO RIVER DELTA

Noel Carbajal\*  
Yovani Montaña

Instituto de Ciencias del Mar y Limnología  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Estación Mazatlán  
Apartado postal 811  
Mazatlán, Sinaloa, México

\* E-mail: noelc@mar.icmyl.unam.mx

*Recibido en enero de 1999; aceptado en agosto de 1999*

#### RESUMEN

Se realizó un análisis de estabilidad lineal para investigar la formación de bancos de arena en el delta del Río Colorado. Una solución aproximada de la ecuación de vorticidad se incorporó a la ecuación de cambio de fondo para evaluar las tasas de crecimiento inicial de los bancos de arena. La estimación de las tasas de crecimiento se efectuó en un plano de número de onda para condiciones hidrodinámicas del delta del Río Colorado, específicamente para elipses de mareas, incluyendo el caso de mareas unidireccionales, así como para diferentes profundidades. Las longitudes de onda predichas por el modelo varían entre 2 y 7 km. Estos resultados concuerdan muy bien con las escalas de bancos de arena reportadas en la literatura sobre el delta del Río Colorado. El orden de magnitud de las tasas de crecimiento estimado en esta investigación coincide con resultados obtenidos para el Mar del Norte.

*Palabras clave:* mareas, bancos de arena, tasas de crecimiento, delta del Río Colorado.

#### ABSTRACT

A linear stability analysis was carried out to investigate the sand bank formation in the Colorado River Delta. A truncated solution of the vorticity equation was included in the bottom evolution equation in order to evaluate the initial growth rates of the sand banks. The growth rates were estimated on the wave number plane for the hydrodynamic conditions of the Colorado River Delta, specifically for tidal ellipses, including unidirectional tides, and also for several depths. The wave lengths predicted with the model fluctuated between 2 and 7 km. These results agree quite well with the sand bank scales reported in the literature on the Colorado River Delta. The order of magnitude of the growth rates calculated in this study coincides with results obtained for the North Sea.

*Key words:* tides, sand banks, growth rates, Colorado River Delta.

## INTRODUCCIÓN

Los bancos de arena, de acuerdo con Huthnance (1973), son formas de fondo cuasi-periódicas, alineadas con las corrientes de marea que se presentan ampliamente en las plataformas continentales, aparentemente donde las corrientes de marea son intensas y la disponibilidad de arena es considerable. A gran escala, los mayores cuerpos de arena en las plataformas son los bancos (Stride, 1982). En la literatura se han asignado varios nombres al mismo patrón regular: bancos lineales de arena (Huthnance, 1982), bancos de corrientes de marea (Off, 1963) o bancos de arena (Hulscher, 1996). Los bancos de arena se han encontrado en mares someros caracterizados por intensas corrientes de marea:  $0.5$  a  $2.5 \text{ m s}^{-1}$  (Allen, 1968). No existen evidencias de que los bancos de arena se desplacen. Sus crestas se encuentran orientadas con una ligera rotación (entre  $5^\circ$  y  $30^\circ$ ) en sentido contrario al de las manecillas del reloj, con respecto a la dirección principal de la corriente de marea. Las escalas de espacio de los bancos de arena (2 a 10 km) son mayores que las escalas de las ondas de arena (100 a 800 m); sus amplitudes alcanzan hasta los 30 m, mientras que las amplitudes de las ondas de arena usualmente son menores que 5 m (Hulscher, 1996).

La observación de las distintas escalas entre la longitud horizontal de los bancos de arena y la longitud de la onda de marea, de acuerdo con Hulscher (1996), sugiere que la formación de los bancos puede explicarse como inestabilidades libres de un sistema morfológico dinámico en el cual las corrientes de marea y el fondo marino interactúan propiciando la evolución de estas formas de fondo. El primer análisis de esta clase sobre la formación de los bancos de arena lo realizó Huthnance (1982), quien describió el movimiento del agua usando las ecuaciones de aguas someras verticalmente promediadas, complementadas por la ecuación de conservación de sedimento, así como por una parametrización del transporte como carga de fondo. Este análisis lo extendieron De Vriend (1990) y Hulscher (1996).

## INTRODUCTION

Huthnance (1973) defined sand banks as quasi-periodic bed forms aligned with tidal currents that occur widely on continental shelves, apparently where the tidal currents are intense and there is an ample supply of sand. Banks are the largest bodies of sand on the shelves (Stride, 1982). In the literature, many names have been given to the same regular pattern: linear sand banks (Huthnance, 1982), tidal current banks (Off, 1963) or sand banks (Hulscher, 1996). Sand banks have been found in shallow seas characterized by intense tidal currents:  $0.5$  to  $2.5 \text{ m s}^{-1}$  (Allen, 1968). There is no evidence that sand banks move. Their crests are oriented with a slight counterclockwise rotation (between  $5^\circ$  and  $30^\circ$ ), with respect to the principal direction of the tidal current. The spatial scales of sand banks (2 to 10 km) are greater than the scales of sand waves (100 to 800 m); their amplitudes reach up to 30 m, whereas the amplitudes of sand waves are usually smaller than 5 m (Hulscher, 1996).

According to Hulscher (1996), the different scales observed between the horizontal length of sand banks and the length of the tidal wave suggest that the formation of the banks is due to free instabilities of a dynamic morphological system in which the tidal currents and sea bottom interact to generate these types of bed forms. The first analysis of this type on the formation of sand banks was made by Huthnance (1982), who described water movement using the vertically averaged shallow water equations, complemented by an equation of sediment conservation, as well as a parameterization of the bed load transport. This analysis was extended by De Vriend (1990) and Hulscher (1996). A different approximation was provided by Bocksar-Karikewitz (1986), who related the formation of banks to infragravity waves.

Una aproximación diferente fue proporcionada por Bocksar-Karikiewitz (1986), quien relacionó la génesis de los bancos a ondas de infragravedad.

La dificultad en determinar la formación y el comportamiento actual de los bancos de arena radica en la complejidad de los procesos que se presentan en las plataformas continentales y en la magnitud de los bancos. Debido a sus dimensiones, longitudes de onda del orden de 2 a 10 km, las escalas de tiempo en las cuales estos bancos se forman y modifican son del orden de décadas o siglos. Los bancos de arena se forman por lo tanto como respuestas, promediadas en el tiempo, a regímenes hidrodinámicos (Huthnance, 1982; De Vriend, 1990).

De acuerdo con Off (1963), los bancos de arena se encuentran en márgenes continentales caracterizados por plataformas amplias con grandes rangos de marea. En su trabajo, Off clasificó los bancos de arena existentes en muchas regiones del mundo e indicó la carencia de datos de profundidad en el Golfo de California, donde él sospechó la existencia de bancos asociados con las fuertes corrientes y con las grandes amplitudes de marea que caracterizan a esa área geográfica. Sondeos más recientes del norte del Golfo de California muestran fuertes evidencias de bancos de arena en las proximidades del delta del Río Colorado. Thompson (1965), a través de una batimetría, presentó bancos de arena alineados con la costa de Sonora en la parte este del delta. Por su parte, Merckel (1975) describió tres distintos ambientes en el norte del golfo, incluyendo una topografía de crestas y valles análoga a los bancos de arena descritos por Off (1963).

En el delta del Río Colorado no se ha realizado intento alguno para explicar la naturaleza de los bancos de arena, menos aún para evaluar las tasas de crecimiento inicial de estos patrones regulares de gran escala del fondo marino. El propósito de esta investigación es dar un paso en ese sentido, examinando el efecto de las corrientes de marea en la formación y mantenimiento de estos sistemas. Este objetivo implica la investigación en un plano de número de onda de las tasas de crecimiento inicial de perturbaciones de formas

The difficulty in determining the actual formation and behavior of sand banks lies in the complexity of the processes that occur on continental shelves and in the magnitude of the banks. Due to their size and wave lengths of the order of 2 to 10 km, the time scales in which these banks are formed and modified are of the order of decades or centuries. Sand banks are thereby formed as time-averaged responses to hydrodynamic regimens (Huthnance, 1982; De Vriend, 1990).

According to Off (1963), sand banks are found on continental margins characterized by wide shelves with large tidal ranges. This author classified sand banks from many parts of the world and noted the lack of depth data for the Gulf of California, where this author suspected the existence of banks associated with the strong currents and large tidal amplitudes that characterize this area. More recent soundings of the northern Gulf of California show strong evidence of sand banks close to the Colorado River Delta. Thompson (1965) used a bathymetry to present sand banks aligned with the coast of Sonora in the eastern part of the delta. Merckel (1975) described three different environments in the northern gulf, including a topography of crests and valleys analogous to the sand banks described by Off (1963).

In the Colorado River Delta, no attempt has been made to explain the nature of the sand banks or to evaluate the initial growth rates of these regular, large-scale patterns of the sea floor. The objective of this study is to begin the investigative process by examining the effect of tidal currents on the formation and maintenance of these systems. This involves the study in the wave number plane of the initial growth rates of bed form perturbations under the effect of tidal ellipses and specific Coriolis and friction parameters for the Upper Gulf of California.

de fondo bajo el efecto de elipses de marea y de parámetros específicos de Coriolis y fricción para el Alto Golfo de California.

### ÁREA DE ESTUDIO

El área del Alto Golfo de California donde se han encontrado fuertes evidencias de bancos de arena es la zona comprendida entre los 31°25' y 31°45' de latitud Norte y 114°20' y 114°45' de longitud Oeste. La batimetría del delta del Río Colorado presentada por Thompson (1965) muestra, sobre la plataforma del estado de Sonora, cerca de la Isla de Montague, un patrón rítmico de cuerpos de arena de gran escala que podrían identificarse como bancos de arena (fig. 1).

El Alto Golfo de California se caracteriza por condiciones extremas de corrientes y de amplitudes de marea. Roden y Groves (1959) describen rangos de mareas hasta de 10 m y velocidades superiores a los 3 m s<sup>-1</sup>. Las amplitudes de marea semidiurna en el Golfo de California, de acuerdo con Carbajal (1993), decrecen de sur a norte hasta Santa Rosalía, para luego amplificarse fuertemente hacia la parte norte del golfo. Como la resonancia es una respuesta amplificada de una cuenca a una función forzante, esto sugiere la existencia de un periodo natural de resonancia en o cercano a la banda semidiurna.

Las corrientes de marea más rápidas, según Carbajal (1993), se encuentran en Salsipuedes y cerca de la boca del Río Colorado, donde tan solo para la M<sub>2</sub> alcanzan valores hasta de 0.80 m s<sup>-1</sup>. Las velocidades transversales en el golfo son muy pequeñas, ya que el flujo es básicamente a lo largo del mismo. En términos generales las velocidades se incrementan rápidamente de la parte central del golfo hacia el norte, alcanzando los valores máximos en la región próxima a la desembocadura del Río Colorado.

### EL MODELO

Basados en los trabajos de Huthnance (1982) y Hulscher (1996), se plantea un modelo morfológico que describe básicamente la interacción de la

### STUDY AREA

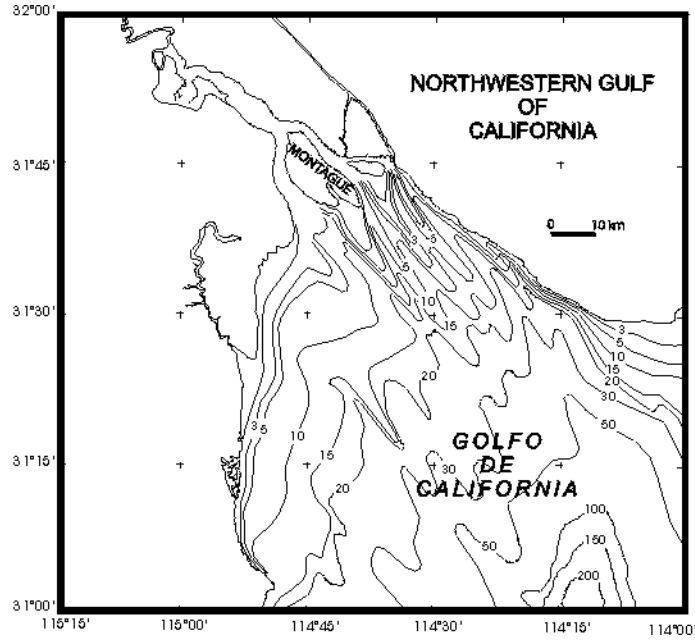
The region of the Upper Gulf of California where there is strong evidence of sand banks comprises the area between 31°25' and 31°45'N and 114°20' and 114°45'W. The bathymetry of the Colorado River Delta presented by Thompson (1965) shows a rhythmic pattern of large-scale sand bodies on the shelf of the state of Sonora, close to Montague Island, that could be identified as a sand bank (fig. 1).

The Upper Gulf of California is characterized by extreme tidal conditions and tidal amplitudes. Roden and Groves (1959) reported tidal ranges of up to 10 m and speeds higher than 3 m s<sup>-1</sup>. According to Carbajal (1993), the semidiurnal tidal amplitudes in the Gulf of California decrease from south to north until Santa Rosalía, and then increase strongly towards the northern part of the gulf. Since resonance is an amplified response of the basin to a forcing function, this suggests the existence of a natural resonance period in or close to the semidiurnal band.

Carbajal (1993) reports that the fastest tidal currents occur at Salsipuedes and close to the mouth of the Colorado River, where for M<sub>2</sub> alone they reach values of up to 0.80 m s<sup>-1</sup>. Since the flow is basically along the gulf, the transverse speeds in it are very low. In general terms, speeds increase quickly from the central part of the gulf northwards, reaching maximum values in the area around the mouth of the Colorado River.

### THE MODEL

A morphological model is proposed, based on the works of Huthnance (1982) and Hulscher (1996), that describes the interaction of the tide



**Figura 1.** Batimetría del área de estudio basada en Thompson (1965).  
**Figure 1.** Bathymetry of the study area based on Thompson (1965).

marea con un fondo marino erosionable. El movimiento del fluido es descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes para aguas someras verticalmente promediadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - r \frac{u}{H - h + \zeta} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - r \frac{v}{H - h + \zeta} \quad (2)$$

y la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\zeta - h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(H + \zeta - h)u] + \frac{\partial}{\partial y}[(H + \zeta - h)v] = 0 \quad (3)$$

Adicionalmente, se considera una ecuación para la conservación de sedimento:

with the erodible sea bottom. The movement of the fluid is described with the Navier-Stokes equations for vertically averaged shallow waters:

and the equation of continuity:

Furthermore, an equation is considered for sediment conservation:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_b = 0 \quad (4)$$

y finalmente una ecuación empírica que representa el transporte de sedimento como carga de fondo:

and finally an empirical equation that represents bed load sediment transport:

$$\vec{S}_b = a |\vec{u}|^b \left[ \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} - \lambda \vec{\nabla} h \right] \quad (5)$$

En este conjunto de ecuaciones,  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad en las direcciones  $x$  y  $y$ ,  $f$  es el parámetro de Coriolis,  $\zeta$  es la elevación del mar,  $H$  es la profundidad media del mar,  $h$  representa los cambios del fondo marino y  $r$  es el coeficiente de fricción lineal. Además,  $S_b$  es el transporte de sedimento,  $b$  es la potencia del transporte,  $a$  y  $\lambda$  son constantes.

In this system of equations,  $u$  and  $v$  are the velocity components in the  $x$  and  $y$  directions,  $f$  is the Coriolis parameter,  $\zeta$  is the sea elevation,  $H$  is the mean sea depth,  $h$  is the change in the sea floor and  $r$  is the linear coefficient of friction. Furthermore,  $S_b$  is the sediment transport,  $b$  is the power of transport and  $a$  and  $\lambda$  are constants.

La solución de este complejo sistema de ecuaciones es muy difícil. Una manera de simplificarlo es efectuar un análisis de la magnitud de los diferentes términos. Para este fin, se observa que en el planteamiento del problema existen dos escalas espaciales: una es la escala de la longitud de onda de marea  $L$  y la otra es la escala definida por la excursión de las partículas de agua  $l_m = U/\sigma$ , donde  $U$  es la amplitud de las corrientes de marea y  $\sigma$  es la frecuencia de la onda de marea considerada. En este trabajo,  $\sigma = 1.4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  corresponde a la frecuencia de la marea  $M_2$ . La escala de tiempo está determinada por el inverso de  $\sigma$ .

This complex system of equations is very difficult to solve. One way to simplify the process is to analyze the magnitude of the different terms. It is observed that the layout of the problem presents two spatial scales: one is the scale of the length of the tidal wave  $L$  and the other is the scale defined by the excursion of water particles  $l_m = U/\sigma$ , where  $U$  is the amplitude of the tidal currents and  $\sigma$  is the frequency of the tidal wave considered. In this study,  $\sigma = 1.4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  corresponds to the  $M_2$  tidal frequency. The time scale is determined by the inverse of  $\sigma$ .

El proceso de escalamiento implica escribir las ecuaciones 1 a 5 en forma adimensional. De acuerdo con las escalas planteadas arriba y con la introducción de las variables adimensionales

The scaling process requires equations 1 to 5 to be written in an adimensional form. According to the scales mentioned above and to the introduction of adimensional variables

$$\vec{u}_* = \frac{\vec{u}}{U}, \quad t_* = t\sigma, \quad \vec{x}_* = \frac{\vec{x}}{l_m}, \quad h_* = \frac{h}{H}, \quad \zeta_* = \frac{g\zeta}{UL\sigma}$$

se llega a las siguientes ecuaciones:

we arrive at the following equations:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \hat{f}v \right) + \frac{\delta \hat{r}u}{1 + \delta \zeta - h} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \delta \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \hat{f}u \right) + \frac{\delta \hat{r}v}{1 + \delta \zeta - h} = 0 \quad (7)$$

$$\delta \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(1-h+\delta\zeta)u] + \frac{\partial}{\partial y}[(1-h+\delta\zeta)v] = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\hat{a}\vec{\nabla} \cdot \left\langle |\hat{u}|^b \left( \frac{\hat{u}}{|\hat{u}|} - \hat{\lambda}\vec{\nabla}h \right) \right\rangle \quad (9)$$

Por razones prácticas se eliminaron los asteriscos. Además, se introdujeron las siguientes constantes:

For practical purposes, the asterisks were eliminated. Furthermore, the following constants were introduced:

$$\delta = \frac{U}{\sigma L} = \frac{l_m}{L}, \quad \hat{r} = \frac{r}{\sigma H}, \quad \hat{f} = \frac{f}{\sigma}, \quad \hat{\lambda} = \lambda \frac{H\sigma}{U}, \quad \hat{a} = \frac{aU^b}{Hl_m\sigma} = \frac{1}{\sigma T_m}$$

En la derivación de estas últimas ecuaciones es importante mencionar algunas consideraciones: en la escala de tiempo de la constituyente de marea, el fondo marino, caracterizado por la variable  $h$ , no cambia significativamente. Por lo tanto, en la obtención de la ecuación de continuidad (8) se ha supuesto que  $\partial h/\partial t = 0$ . En la derivación de la ecuación 9 se ha tomado en cuenta que lo que realmente interesa es el efecto neto de la marea en un periodo completo. El paréntesis triangular indica que la ecuación es promediada en un ciclo de marea. Es interesante hacer notar que el producto  $\tau_m = t\hat{a}$  puede ser interpretado como una nueva variable temporal indicando los lentos cambios morfológicos.

In the derivation of the latter equations, it is important to mention some considerations: in the time scale of the tidal constituent, the sea floor, characterized by variable  $h$ , does not change significantly. Thus, to obtain the equation of continuity (8), it was assumed that  $\partial h/\partial t = 0$ . In the derivation of equation 9, the net effect of the tide in one complete cycle was considered to be of the utmost importance. The triangular parenthesis indicates that the equation is averaged in one tidal cycle. It is interesting to note that the product  $\tau_m = t\hat{a}$  can be interpreted as a new temporal variable that indicates the slow morphological changes.

La solución del sistema de las ecuaciones 6 a 9 se obtiene usando métodos de perturbación. Considere en términos generales que la solución está dada por  $\psi = \psi(u, v, \zeta, h)$ . Para pequeñas perturbaciones del sistema, se busca una solución de la forma:

The solution of the system of equations 6 to 9 is obtained using perturbation methods. Consider that in general terms, the solution is given by  $\psi = \psi(u, v, \zeta, h)$ . For small perturbations of the system, a solution is sought of the form:

$$\Psi = \Psi_0 + \mu\Psi_1 + \mu^2\Psi_2 \dots$$

donde  $\mu$  es un parámetro pequeño. Tal y como lo ha demostrado Hulscher (1996), este modo de perturbación conduce a un sistema sin solución, por lo que adicionalmente se efectúa otra perturbación de las funciones  $\psi$  en base al parámetro  $\delta$ .

where  $\mu$  is a small parameter. As has been shown by Hulscher (1996), this mode of perturbation leads to a system without solution, and therefore an additional perturbation of the  $\psi$  functions was carried out based on the  $\delta$  parameter.

Es decir,

This is,

$$\Psi_n = \Psi_{n0} + \delta\Psi_{n1} + \delta\Psi_{n2} + \dots \quad \text{para/for } n = 1, 2, 3, \dots$$

Aplicando este método de perturbación a las ecuaciones 6 a 9, se obtiene para el orden cero el siguiente resultado:

Applying this perturbation method to equations 6 to 9, the following is obtained for the zero order:

$$\frac{\partial \zeta_{00}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta_{00}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_{00}}{\partial x} + \frac{\partial v_{00}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\langle |\vec{u}_{00}|^{b-1} u_{00} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y} \left\langle |\vec{u}_{00}|^{b-1} v_{00} \right\rangle \quad (10)$$

Para este estado básico se propone la siguiente solución:

For this basic state, the following solution is proposed

$$u_{00} = \varepsilon s \int dt, \quad v_{00} = \cos t, \quad (11)$$

la cual describe un flujo caracterizado por la elipse de marea con excentricidad  $\varepsilon$ . Puede demostrarse que para la ecuación de continuidad resulta para el primer orden

which describes a flow characterized by the tidal ellipse with eccentricity  $\varepsilon$ . It can be shown that for the continuity equation for the first order it is

$$\frac{\partial \zeta_{10}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_{10}}{\partial y} + \frac{\partial v_{10}}{\partial x} - u_{00} \frac{\partial h_{10}}{\partial x} - v_{00} \frac{\partial h_{10}}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

y para la conservación de sedimento

and for sediment conservation

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{10}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left\langle |\vec{u}_0|^{b-1} u_{10} + (b-1) |\vec{u}_0|^{b-3} u_{00} (u_{00} u_{10} + v_{00} v_{10}) - |\vec{u}_0|^{b-1} \hat{\lambda} \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \right\rangle \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\langle |\vec{u}_0|^{b-1} v_{10} + (b-1) |\vec{u}_0|^{b-3} v_{00} (u_{00} u_{10} + v_{00} v_{10}) - |\vec{u}_0|^{b-1} \hat{\lambda} \frac{\partial h_{10}}{\partial y} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Combinando las ecuaciones de movimiento para el primer orden se obtiene la ecuación de vorticidad:

The vorticity equation is obtained by combining the equations of movement for the first order:

$$\frac{\partial \eta_{10}}{\partial t} + u_{00} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial x} + v_{00} \frac{\partial \eta_{10}}{\partial y} = -\hat{r} \left( \eta_{10} + v_{00} \frac{\partial h_{10}}{\partial x} - u_{00} \frac{\partial h_{10}}{\partial y} \right) - \hat{f} \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial x} + \frac{\partial v_{10}}{\partial y} \right) \quad (14)$$

con

with

$$\eta_{10} = \frac{\partial v_{10}}{\partial x} - \frac{\partial u_{10}}{\partial y}$$

Siguiendo la metodología aplicada por Zimmerman (1980), este sistema de ecuaciones

Following the methods of Zimmerman (1980), this system of linearized equations is



linealizado es resuelto aplicando una transformación espacial para  $u_{10}$ ,  $v_{10}$ ,  $h_{10}$  y  $\eta_{10}$  de la forma

$$\begin{aligned} u_{10} &= \iint \vec{u}(k, t) e^{-ik \cdot \vec{x}} d\vec{k} + cc \\ h_{10} &= \iint \vec{h}(k, t) e^{-ik \cdot \vec{x}} d\vec{k} + cc \end{aligned} \quad \begin{aligned} v_{10} &= \iint \vec{v}(k, t) e^{-ik \cdot \vec{x}} d\vec{k} + cc \\ \eta_{10} &= \iint \vec{\eta}(k, t) e^{-ik \cdot \vec{x}} d\vec{k} + cc \end{aligned} \quad (15)$$

solved by applying a spatial transformation for  $u_{10}$ ,  $v_{10}$ ,  $h_{10}$  and  $\eta_{10}$  of the form

De esta manera se obtienen las ecuaciones:

Thus, the following equations are obtained:

$$\tilde{v} = (k^2 + l^2)^{-1} (ik\tilde{\eta} + l(k\varepsilon s \text{ int} + l \cos t)\tilde{h}) \quad (16)$$

$$\tilde{u} = (k^2 + l^2)^{-1} (il\tilde{\eta} + k(k\varepsilon s \text{ int} + l \cos t)\tilde{h}) \quad (17)$$

Sustituyendo las ecuaciones 15, 16 y 17 en la ecuación de vorticidad (14) se obtiene

Substituting equations 15, 16 and 17 in the vorticity equation (14) we obtain

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} - (ik\varepsilon s \text{ int} + il \cos t - \hat{r})\tilde{\eta} = i\tilde{h}[(k\hat{r} + \hat{l}f) \cos t + (-l\hat{r} + k\hat{f})\varepsilon s \text{ int}] \quad (18)$$

y para la evolución del fondo marino

and for the evolution of the sea floor

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} &= - \left\{ \hat{\lambda}(k^2 + l^2)(\varepsilon^2 \sin^2 t + \cos^2 t)^{b/2} \tilde{h} + \right. \\ &\left. \frac{(b-1)}{(k^2 + l^2)} \left[ \frac{1}{2}(k^2 - l^2)\varepsilon \sin 2t + lk(\cos^2 t - \varepsilon^2 \sin^2 t) \right] (\varepsilon^2 \sin^2 t + \cos^2 t)^{(b-3)/2} \tilde{\eta} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

La ecuación de vorticidad (18) tiene una solución exacta únicamente para valores de  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  y  $\varepsilon = -1$ . Una manera de estudiar las tasas de crecimiento de bancos de arena para todo el rango  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$  fue propuesta por Hulscher (1996). Puesto que la vorticidad oscila con el periodo de la marea constituyente y sus armónicos, el método consiste en proponer para la vorticidad  $\tilde{\eta}$  una

The vorticity equation (18) has only one exact solution for values  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  and  $\varepsilon = -1$ . Hulscher (1996) proposed a method to study the growth rates of sand banks in the entire range  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ . Given that vorticity oscillates with the tidal period constituent and its harmonics, the method consists of proposing for vorticity  $\tilde{\eta}$  one solution of the form

$$\tilde{\eta} = \tilde{h}d_0 + \tilde{h} \sum_{p=1}^N (d_{sp} \sin pt + d_{cp} \cos pt) \quad (20)$$

solución de la forma

Sustituyendo la ecuación 20 en la ecuación 18 se pueden calcular los coeficientes  $d_{sp}$  y  $d_{cp}$  mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

Substituting equation 20 in equation 18, the coefficients  $d_{sp}$  and  $d_{cp}$  can be calculated with the following system of equations:

$$\begin{pmatrix} \hat{r} & -\frac{1}{2}il & -\frac{1}{2}ik\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ik\varepsilon & -1 & \hat{r} & \frac{1}{2}ik\varepsilon & -\frac{1}{2}il & 0 & 0 \\ -il & \hat{r} & 1 & -\frac{1}{2}il & -\frac{1}{2}ik\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}ik\varepsilon & -\frac{1}{2}il & -2 & \hat{r} & -\frac{1}{2}ik\varepsilon & -\frac{1}{2}il \\ 0 & -\frac{1}{2}il & \frac{1}{2}ik\varepsilon & \hat{r} & 2 & -\frac{1}{2}il & -\frac{1}{2}ik\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}ik\varepsilon & -\frac{1}{2}il & -3 & \hat{r} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}il & \frac{1}{2}ik\varepsilon & \hat{r} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_{c1} \\ d_{s1} \\ d_{c2} \\ d_{s2} \\ d_{c3} \\ d_{s3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon i(k\hat{f} - l\hat{r}) \\ i(l\hat{f} + k\hat{r}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Interpretando, en la ecuación 19, el término  $\frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}$  como la tasa de crecimiento, se obtiene la solución final para un  $k$  y  $l$  determinados. Hulscher (1996) demostró que las soluciones exacta y truncada (ecuación 18) son muy semejantes. El proceso de cálculo se repite para todo un rango de valores de números de onda horizontales  $k$  y  $l$ . De esta manera se determina el número de onda  $\vec{K} = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ , el cual representa la escala más favorable al crecimiento de bancos de arena.

**RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

En esta investigación, siguiendo el modelo de Hulscher (1996), se utilizó una aproximación de estabilidad para determinar, bajo parámetros específicos de marea y sedimentos, las circunstancias que favorecen la formación de bancos de arena en la parte norte del Golfo de California, más concretamente, en las proximidades del delta del Río Colorado.

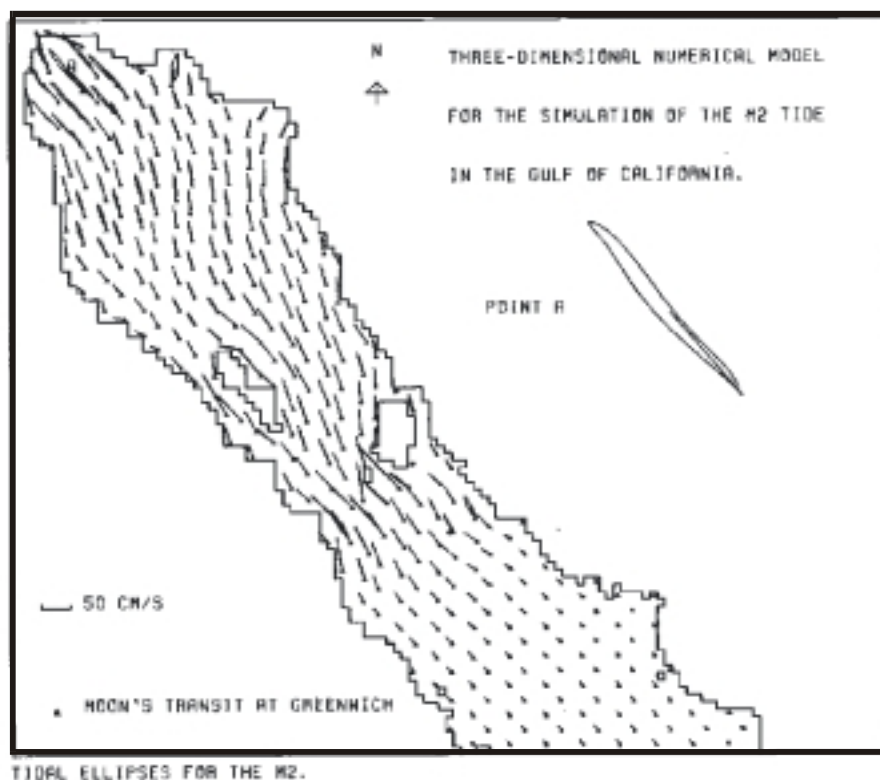
En el análisis efectuado se consideraron elipses de marea cuyas expresiones matemáticas se sustituyeron en las ecuaciones de las componentes de las velocidades de marea. Las elipses de marea han sido simuladas numéricamente por Carbajal (1993) en investigaciones previas de la circulación en el Golfo de California, a través de un modelo tridimensional (fig. 2). Se observa que el movimiento de las partículas de agua es prácticamente rectilíneo en toda la región. Únicamente en

Interpreting, in equation 19, the term  $\frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}$  as the growth rate, we obtain the final solution for one determined  $k$  and  $l$ . Hulscher (1996) showed that the exact and truncated solutions (equation 18) are very similar. The calculation process is repeated for the entire range of values of horizontal wave numbers  $k$  and  $l$ . In this manner, the wave number  $\vec{K} = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$  is determined, which represents the most favorable scale for the development of sand banks.

**RESULTS AND DISCUSSION**

Following the model of Hulscher (1996), this study used an approximation of stability to determine the circumstances that favor the formation of sand banks, under specific parameters of tide and sediments, in the northern part of the Gulf of California, more precisely in the Colorado River Delta.

In this study, tidal ellipses were considered, the mathematical expressions of which were substituted in the equations of the tidal velocity components. Tidal ellipses were simulated numerically with a three-dimensional model by Carbajal (1993) in previous works on the circulation in the Gulf of California (fig. 2). The movement of the water particles appears to be practically rectilinear in the entire region. Only in the Colorado River Delta region does ellipticity increase slightly. The location of this area, where



**Figura 2.** Elipses de la marea  $M_2$  en el Golfo de California de acuerdo con Carbajal (1993).  
**Figure 2.** Ellipses of the  $M_2$  tide in the Gulf of California according to Carbajal (1993).

la zona del delta del Río Colorado aumenta ligeramente la elipticidad. La ubicación de esta zona, donde la excentricidad de las elipses de marea aumenta levemente, coincide con los sitios donde se asume la existencia de los bancos de arena.

El análisis incluyó varios experimentos en los que se consideraron parámetros representativos del delta del Río Colorado:  $\hat{f} = 0.8$  correspondió al parámetro de Coriolis  $f = 7.6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , evaluado para una latitud promedio de  $31.5^\circ\text{N}$ , dividido por la frecuencia de la marea  $\sigma = 1.4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; un coeficiente de fricción  $r = 0.0025$  y la constante  $\lambda = 2.37$  fueron aplicados. La elipse de marea considerada tuvo una amplitud de  $1 \text{ m s}^{-1}$ .

eccentricity of the tidal ellipses increases slightly, coincides with the sites where sand banks are assumed to exist.

The analysis included various experiments which considered representative parameters of the Colorado River Delta:  $\hat{f} = 0.8$  corresponded to the Coriolis parameter  $f = 7.6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , evaluated for an average latitude of  $31.5^\circ\text{N}$ , divided by the tidal frequency  $\sigma = 1.4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; a friction coefficient  $r = 0.0025$  and the constant  $\lambda = 2.37$  were applied. The tidal ellipse considered had an amplitude of  $1 \text{ m s}^{-1}$ . Calculations were made of various depths in the study area (5, 10 and 30 m), in order to determine the true physical condition of the study area. The parameter  $b = 3$  (power of

Se efectuaron cálculos para varias profundidades en el área de estudio (5, 10 y 30 m), obteniendo una situación física realista de la región investigada. El parámetro  $b = 3$  (poder del transporte) se seleccionó también para representar a grosso modo las condiciones en las proximidades del delta del Río Colorado.

Las tasas iniciales de crecimiento de las perturbaciones de las formas de fondo se evaluaron de los promedios temporales de las componentes armónicas de las mareas. Como uno de los propósitos fundamentales de esta investigación fue determinar la influencia que tiene la profundidad del agua en la generación de los bancos de arena, a través de varios experimentos se consideró como variable la profundidad del agua. Las isólinas de las tasas de crecimiento correspondientes a las profundidades de 5, 10 y 30 m se presentaron en planos de números de onda observando una disminución de los valores de las tasas de crecimiento conforme se incrementó la profundidad (fig. 3). Otro efecto del aumento de la profundidad fue el desplazamiento del contorno con la mayor tasa de crecimiento inicial hacia el eje donde la componente del número de onda  $l = 0$ . El efecto de la profundidad del agua en las tasas de crecimiento tiene lugar a través del incremento del parámetro de fricción a medida que las aguas se tornan más someras.

El modo de crecimiento más rápido (fig. 3, 5 m) correspondió a  $k = 22$  y  $l = 10$ , con una tasa de crecimiento de más de 2.2. Para este modo, se calculó una longitud de onda real de aproximadamente 2 km, con una cresta orientada  $25^\circ$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a la dirección principal de la corriente de marea. Las líneas de contornos correspondientes a los mayores modos de crecimiento presentaron cierta simetría con respecto al eje donde la componente del número de onda era igual a cero. Para las profundidades de 10 y 30 m las escalas de los bancos corresponden a 4 y 7 km y las orientaciones de las crestas fueron  $22^\circ$  y  $30^\circ$ , respectivamente.

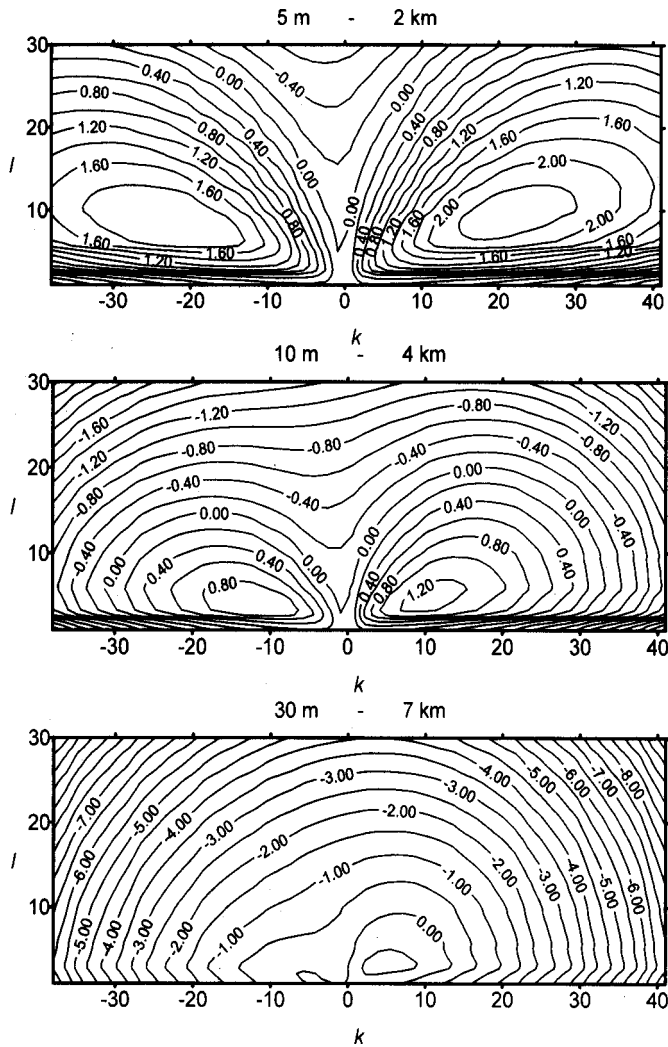
Se utilizó la batimetría presentada por Thompson (1965) para estimar las longitudes de

transport) was also selected as a rough representation of the conditions in the Colorado River Delta.

The initial growth rates of the perturbations of the bottom shapes were evaluated with the temporal averages of the harmonic components of the tides. Since one of the fundamental objectives of this work was to determine the influence of water depth on the generation of sand banks, water depth was considered a variable in the experiments. The isolines of the growth rates corresponding to the 5-, 10- and 30-m depths were presented in planes of wave numbers, and a decrease in the values of the growth rates as depth increased was observed (fig. 3). Another effect of the increase in depth was the displacement of the contour with the greatest initial growth rate towards the axis where the wave number component  $l = 0$ . The effect of water depth on the growth rates can be observed with the increase in the friction parameter as the water becomes shallower.

The fastest growth mode (fig. 3, 5 m) corresponded to  $k = 22$  and  $l = 10$ , with a growth rate of more than 2.2. For this mode, a true wave length was calculated of approximately 2 km, with a crest oriented  $25^\circ$  counterclockwise with respect to the principal direction of the tidal current. The contour lines corresponding to the greatest growth modes presented some symmetry with respect to the axis where the wave number component was equal to zero. For the 10- and 30-m depths, the scales of the banks corresponded to 4 and 7 km and the orientations of the crests were  $22^\circ$  and  $30^\circ$ , respectively.

The bathymetry presented by Thompson (1965) was used to estimate the wave lengths of the sand banks (2 to 7 km). The orientation of the crests of the banks is turned slightly counterclockwise. These estimates agree with the results obtained with the model used in this work. Furthermore, the wave lengths of the banks obtained with the model are comparable to those observed by Merckel (1975), who described a topography of crests and valleys characterized by what this author described as marine tidal bars

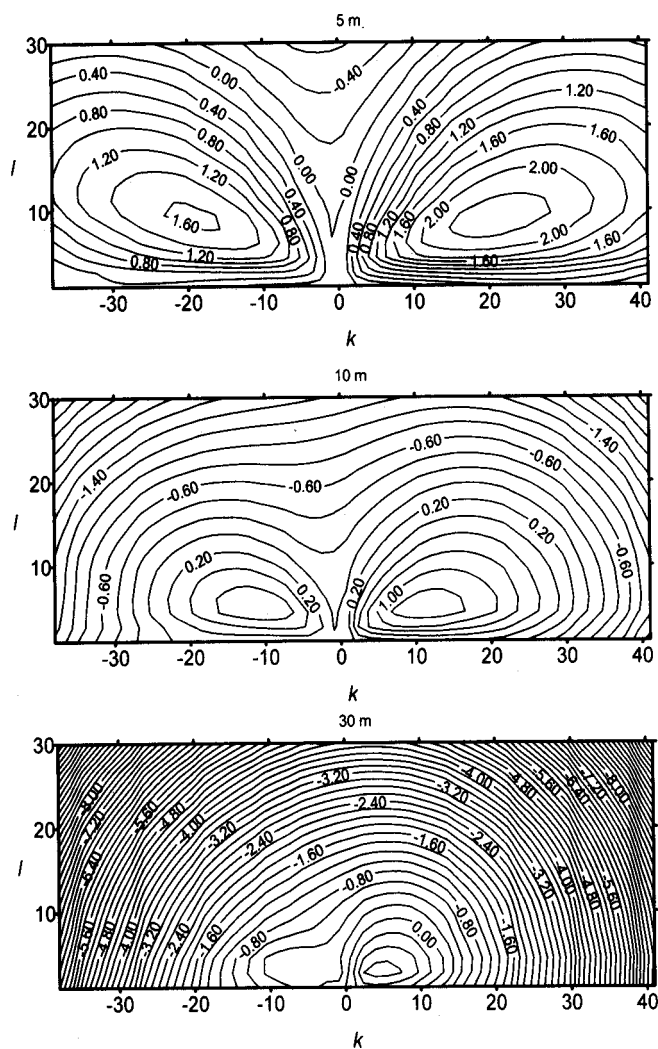


**Figura 3.** Tasas de crecimiento inicial de bancos de arena a profundidades de 5, 10 y 30 m en las proximidades del delta del Río Colorado para una elipticidad  $\epsilon = 0$ .

**Figure 3.** Initial growth rates of sand banks at depths of 5, 10 and 30 m in the Colorado River Delta for an ellipticity  $\epsilon = 0$ .

onda de los bancos de arena (2 a 7 km). La orientación de las crestas de los bancos está girada ligeramente en sentido contrario a las manecillas del reloj. Estas estimaciones evidentemente concuerdan con los resultados obtenidos a través del

that start in shallow waters close to the mouth of the Colorado River, extend approximately 45 km southwards, and end in depths close to 30 m. This topography was described in terms of a relief between 6 and 10 m and spaces of the order of



**Figura 4.** Tasas de crecimiento inicial de bancos de arena a profundidades de 5, 10 y 30 m en las proximidades del delta del Río Colorado para una elipticidad  $\epsilon = 0.2$ .

**Figure 4.** Initial growth rates of sand banks at depths of 5, 10 and 30 m in the Colorado River Delta for an ellipticity of  $\epsilon = 0.2$ .

modelo aplicado en la presente investigación. Asimismo, las longitudes de onda de los bancos obtenidas a través del modelo son comparables a las observadas por Merckel (1975), quien describió una topografía de crestas y valles caracterizada por lo que él describe como barras marinas

kilometers between each crest; the sedimentation process was defined as a result of the strong currents generated by tidal ranges of 8 to 10 m.

In addition to the above calculations, different experiments were conducted for the same depths of 5, 10 and 30 m, but using  $\epsilon$  eccentricity values

de mareas que nacen en aguas someras cerca de la desembocadura del Río Colorado y se extienden por aproximadamente 45 km hacia el sur, para terminar en profundidades cercanas a 30 m. Esta topografía se describió en términos de un relieve de 6 a 10 m y espacios del orden de kilómetros entre cresta y cresta; el proceso de sedimentación se explicó como un resultado de las fuertes corrientes generadas por rangos de marea de 8 a 10 m.

En adición a los cálculos anteriores, se realizaron diferentes experimentos para las mismas profundidades de 5, 10 y 30 m pero utilizando valores de excentricidad  $\epsilon$  diferentes de cero. En la figura 4 se muestran los resultados obtenidos para  $\epsilon = 0.2$ . En general, se observa que las soluciones son muy semejantes al caso de movimiento rectilíneo ya discutido arriba. El tamaño de los bancos de arena varía en este caso también aproximadamente entre 2 y 7 km.

El orden de las tasas de crecimiento inicial de las formas de fondo obtenidas en esta investigación también concuerda bastante bien con el calculado por Hulscher (1996), en estudios de los bancos de arena llevados a cabo en el Mar del Norte.

## CONCLUSIONES

Basados en los trabajos de Huthnance (1982) y Hulscher (1996), se desarrolló un modelo analítico que explica satisfactoriamente las escalas de los bancos de arena reportados en la literatura sobre el delta del Río Colorado. Es importante señalar que el modelo incluye los efectos de la marea constituyente principal, en este caso la  $M_2$ , y sus armónicos. Las tasas de crecimiento fueron, en general, más intensas en las regiones menos profundas y correspondieron a números de onda adimensionales de  $k \approx 22$  y  $l \approx 10$ . Estos valores dan una escala de banco de arena de 2 km con una cresta orientada  $25^\circ$  en sentido contrario a las manecillas de reloj con respecto a la dirección principal de las corrientes de marea. Finalmente, es relevante mencionar que este modelo está en proceso de ser extendido al caso en que las

different from zero. Figure 4 shows the results obtained for  $\epsilon = 0.2$ . In general, the solutions are very similar to the rectilinear movement discussed above. The size of the sand banks also varies between approximately 2 and 7 km.

The order of the initial growth rates of the bed forms obtained in this work agree very well with that calculated by Hulscher (1996) in studies of sand banks in the North Sea.

## CONCLUSIONS

Based on the works of Huthnance (1982) and Hulscher (1996), an analytical model was developed that satisfactorily explains the scales of the sand banks reported in the literature for the Colorado River Delta. It is important to note that the model includes the effects of the principal tidal constituent, in this case  $M_2$ , and its harmonics. The growth rates were generally more intense in the shallower regions and corresponded to adimensional wave numbers of  $k \approx 22$  and  $l \approx 10$ . These values give a sand bank scale of 2 km with a crest oriented  $25^\circ$  counterclockwise, with respect to the principal direction of the tidal currents. Finally, we are in the process of extending the model to the case in which the water particles do not describe elliptical trajectories, but rather trajectories similar to the Lemniscata function (analogous to a sign of infinity).

English translation by Jennifer Davis.

---

partículas de agua no describen trayectorias elípticas, sino trayectorias semejantes a la función Lemniscata (análoga a un signo de infinito).

## REFERENCIAS

- Allen, J.R.L. (1968). Current-ripples, their Relation to Pattern of Water and Sediment Motion. North-Holland Publishers, 433 pp.
- Bocksar-Karikiewitz, B. (1986). Wave dominated shelves. A model of sand ridges formation by progressive infra-gravity waves. In: J. Knightand

- and R. MacLean (eds.), Shelf Sands and Sand Stones. Mem. Can. Soc. Petroleum Geologists, 11: 163–179.
- Carbajal, N. (1993). Modelling of the circulation in the Gulf of California. *Berichte aus dem Zentrum für Klima- und Meeresforschung. Reihe B: Ozeanographie*, No. 3.
- De Vriend, H.J. (1990). Morphological processes in shallow tidal seas, in residual currents and long-term transport. R.T. Cheng (ed.), Springer Verlag, *Coast. Est. Stud.*, 38: 276–301.
- Hulscher, S. (1996). Formation and migration of large scale, rhythmic seabed patterns: a stability approach. Doctoral thesis, University of Utrecht, Holland, 143 pp.
- Huthnance, J. (1973). Tidal current asymmetries over the Norfolk sandbanks. *Estuar. Coast. Mar. Sci.*, 1: 89–99.
- Huthnance, J. (1982). On one mechanism forming linear sand-banks. *Estuar. Coast. Shelf Sci.*, 14: 79–99.
- Merckel, L.D. (1975). Holocene sand bodies in the Colorado Delta area, northern Gulf of California. In: M.L. Broussard (ed.), *Deltas, Models for Exploration*. Houston Geol. Soc., Houston, pp. 239–265.
- Off, T. (1963). Rhythmic linear sand bodies caused by tidal currents. *Bull. Am. Assoc. Petroleum Geologists*, 47: 324–341.
- Roden, G.I. and Groves, G.W. (1959). Recent oceanographic observations of the Gulf of California. *J. Mar. Res.*, 18: 10–35.
- Stride, A.H. (1982). *Offshore Tidal Sands: Processes and Deposits*. Chapman and Hall, London, 222 pp.
- Thompson, R.W. (1965). Tidal flat sedimentation on the Colorado River Delta, northwestern Gulf of California, San Diego, Calif. University of California, Scripps Institution of Oceanography, 245 pp.
- Zimmerman, J.T.F. (1980). Vorticity transfer by tidal currents over an irregular topography. *J. Mar. Res.*, 38: 601–630.